وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

بعض خواص الضرب الكارتيزي لثلاثة جبور باناخ تحت تأثير الضرب المضطرب باستخدام التشاكلات المستمرة

أطروحة مقدمة
إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/الرياضيات البحته

من قبل
مروان عزيز جردو احمد

بإشراف
الأستاذ الدكتور عامر عبد الاله محمد حسين

1444 هـ 2023 م

المستخلص

في هذه الاطروحة و على غرار دراسة خواص جبور باناخ تحت تاثير الضرب الكارتيزي من قبل العديد من الباحثين قمنا ببناء و دراسة جبور باناخ تحت تاثير الضرب الكارتيزي الثلاثي، و ذلك بالاعتماد على عمليتي الجمع و الضرب القياسي الاعتياديتين، و عملية ضرب جبرية جديدة مبنية على اساس تشاكلين يحملان صفات معينة و يؤثران على تلك الجبور.

و اثبتنا انه اذا كان كل من $\mathfrak{A}$، $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ جبر باناخ، و كان كل من h و g تشاكلاً جبرياً مستمراً بحيث ان $\|h\| \leq 1$ و $\|g\| \leq 1$، فان $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ هو ايضاً جبر باناخ مع المعيار التالي:

$$\|(m,n,r)\|_{\mathfrak{A}\times_h\mathfrak{B}\times_g\mathfrak{C}} = \|m\|_{\mathfrak{A}} + \|n\|_{\mathfrak{B}} + \|r\|_{\mathfrak{C}} \; \forall (m,n,r) \in \mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$$

و نظراً للتأثير الحاصل من قبل كل من h و g على عملية الضرب الاعتيادية المعرفة على الفضاء الثلاثي اطلقنا على عملية الضرب هذه عملية الضرب الثلاثي المضطرب و اسمينا جبر باناخ الناتج بجبر باناخ المضطرب و رمزنا له بالرمز $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$.

كما و درسنا المثاليات مع بعض انواعها في $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$. فضلاً عن ايجاد فضاء كلفاند لجبر باناخ المضطرب $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$، و اثبتنا استقرار العديد من الخصائص الجبرية و التحليلة بالنسبة للضرب المضطرب $(\times_h,\times_g)$ نذكر منها: إنتظام إرينز، القابلية بانواعها المختلفة، خاصية التوسيع الطيفي. و اخيراً، ناقشنا المؤثر المركزي لجبر باناخ المضطرب $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ و اثبتنا ان $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ يمتلك خاصية $BSE-$ في حال امتلاك كل من $\mathfrak{A}$، $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ تلك الخاصية.

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Some Properties of the Cartesian Product of Three Banach Algebras under the Effect of Perturbed Product Using the Continuous Homomorphisms

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/Pure Mathematics**

By

Marwan Azeez Jardo Ahmed

Supervised by

Prof. Dr. Amir Abdulillah Mohammed Hussein

2023 A.D. **1444 A.H.**

Abstract

In this thesis, and similar to the study the properties of the Banach algebra under the influence of Cartesian product by many researchers, we construct and study Banach algebra under the influence of triple Cartesian product, depending on the usual addition operation, the usual scalar product operation, and a new algebraic product based on two homomorphisms that carry certain characteristics and effects on these algebras.

And we prove that if $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ are Banach algebras, $\|h\| \leq 1$ and $\|g\| \leq 1$, then $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ is also Banach algebra with the following norm:

$$\|(m,n,r)\|_{\mathfrak{A}\times_h\mathfrak{B}\times_g\mathfrak{C}} = \|m\|_{\mathfrak{A}} + \|n\|_{\mathfrak{B}} + \|r\|_{\mathfrak{C}} \; \forall (m,n,r) \in \mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$$

Because of the effect caused by both h and g on the ordinary product operation defined in triple space, we named this product the perturbed triple product, and we name the resulting Banach algebra the perturbed Banach algebra and symbolize it with the symbol $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$.

We also study the ideals with some of their types in $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$. In addition, the Gelfand space of the Banach perturbed algebra $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ was found. And we prove the stability of many algebraic and analytical properties with respect to the perturbed product $(\times_h, \times_g)$ we mention, among them: Aren's regularity, amenability with different kinds of it, spectral extension property. Finally, we discuss the centralizer operator of the perturbed Banach algebra $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ and prove that $\mathfrak{A} \times_h \mathfrak{B} \times_g \mathfrak{C}$ has BSE-property if each of $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ has this property.