

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



Novel Enhancements to The Fuzzy Transform and its Applications in Approximating Functions and Solving Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of College of
Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul
as a partial Fulfillment of The Requirements
for the Degree of Master of Science**

In

Mathematics/ Computational Mathematics

By

Ashwaq Abdul Qadir Khidr Al-Rawi

Supervised by

Assist. Prof. Dr. Edrees M. Nori Mahmood

2025 A.D.

1447 A.H.

Abstract

Two important improvements on the framework of the Fuzzy Transform (FT) methodology are discussed in this thesis, which would ultimately be prepared for its applications in function approximation and numerical analysis with uncertainties in data. The first novelty is hybrid FT-PCHIP methodology, which includes low-dimensional fuzzy approximations that can generate the same global trend as well as local accuracy to be preserved shape from the Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial method (PCHIP). This contribution took into account the limitations of standalone FT when it comes to handling local variations through interpolation of the PCHIP, monotonic and minimizing oscillations while dealing with the residuals. The performance of the method was compared through experiments, where the mean square error was improved by more than 98% over classical FT. In this sense, the framework effectively connects discrete empirical readings with continuous modeling and analytical applications and hence is the best fit for engineering and experimental applications for sensor or irregularly sample data.

The second contribution is a GA-based optimization framework for FT, which allays intrinsic problems like fixed node placement and local optima inaccuracy. The method traverses through a dual-phase GA, which first adaptively derives the little number of nodes required for any ε -convergence and then optimizes FT coefficients via a truly global search mechanism. The time complexity of vectorized implementation: real-valued GA is $O(N)$, theoretical convergence under elitist selection and good empirical performance proved by benchmark functions. Therefore, the optimized FT achieved not only a 94% reduction in mean square error by reducing the basic functions but also improving efficiency and accuracy. This makes the method a very strong alternative being data-driven to real-time approximation tasks in signal processing, control, and scientific computing.

The cumulative contributions of these will strengthen considerably FT-based approximation in theory robustness and practical performance, hence equipping the numerical analysis under uncertainty with a scalable, accurate, and proper tool.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الموصل

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

تحسينات جديدة للتحويل الضبابي وتطبيقاتها في تقريب الدوال وحل المعادلات التفاضلية

رسالة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في

الرياضيات / الرياضيات الحاسوبية

من قبل

اشواق عبد القادر خضر سليمان

بإشراف

ا.م.د. ادريس محمد نوري محمود

المستخلص

تناقش هذه الرسالة تحسينين مهمين على إطار منهجية التحويل الضبابي (FT)، والتي سيتم إعدادها في نهاية المطاف لتطبيقاتها في تقريب الدوال والتحليل العددي مع عدم اليقين في البيانات. المساهمة الأولى هي منهجية FT-PCHIP الهجينة، والتي تتضمن تقريب ضبابي منخفض الأبعاد يمكنها توليد نفس الاتجاه العالمي، بالإضافة إلى دقة محلية للحفاظ على شكلها من طريقة استيفاء هيرميت مكعب متعدد الحدود (PCHIP). أخذت هذه المساهمة في الاعتبار قيود التحويل الضبابي المستقل فيما يتعلق بمعالجة التغيرات المحلية من خلال استيفاء PCHIP، والتذبذبات الرتيبة، وتقليل التذبذبات أثناء التعامل مع البواقي. تمت مقارنة أداء الطريقة من خلال التجارب، حيث تم تحسين متوسط مربع الخطأ بأكثر من 98% مقارنةً بالتحويل الضبابي التقليدي. وبهذا المعنى، يربط الإطار بفعالية القراءات التجريبية المنفصلة بالنمذجة المستمرة والتطبيقات التحليلية، وبالتالي يُعد الأنسب للتطبيقات الهندسية والتجريبية لبيانات الاستشعار أو العينات غير المنتظمة.

المساهمة الثانية هي إطار عمل لتحسين التحويل الضبابي قائم على الخوارزميات الجينية والذي يُخفف من المشاكل الجوهرية مثل تثبيت العقد وعدم دقة القيم المثلى المحلية. تمر الطريقة عبر خوارزمية وراثية ثنائية الطور، والتي تشتق أولاً بشكل تكيفي العدد القليل من العقد المطلوبة لأي تقارب ϵ ، ثم تُحسن معاملات التحويل الضبابي عبر آلية بحث شاملة. التعقيد الزمني للتنفيذ المتجهي: الخوارزمية الوراثية ذات القيمة الحقيقية هي $O(N)$ ، والتقارب النظري في ظل الاختيار النخبوي، والأداء التجريبي الجيد الذي أثبتته دوال المقارنة. لذلك، لم يحقق التحويل الضبابي المُحسن انخفاضاً في متوسط خطأ التربيع بنسبة 94% فقط عن طريق تقليل دوال الأساس، بل حسن أيضاً الكفاءة والدقة. هذا يجعل الطريقة بديلاً قوياً للغاية، كونها تعتمد على البيانات، لمهام التقريب في الوقت الفعلي في معالجة الإشارات والتحكم والحوسبة العلمية. إن المساهمات التراكمية لهذه النتائج سوف تعمل على تعزيز التقريب القائم على التحويل الضبابي بشكل كبير من حيث القوة النظرية والأداء العملي، وبالتالي تزويد التحليل العددي في ظل عدم اليقين بأداة قابلة للتطوير ودقيقة ومناسبة.