

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



The Four Potent Nil Clean Rings

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Master of Science
in
Mathematics/ Pure Mathematics**

By

Mohammed Ismael Jumaah Salman

Supervised by

Prof. Dr. Nazar Hamdoon Shuker Mahmmod

2025 A.D.

1447 A.H.

Abstract

A ring is said to be four potent if every element satisfies the identity $x = x^4$ for every $x \in R$. This thesis begins by establishing the fundamental properties of four potent rings. It then introduces the concept of a generalized four potent ring, in which each element satisfies $x^2 = x^4$, meaning that the square of each element is four potent. The core structural properties of such rings are studied in detail. The relationships between generalized four potent rings and other algebraic structures, such as strongly 2-nil clean rings, are examined. Furthermore, the thesis introduces and investigates generalized four potent nil clean rings, focusing on their defining characteristics. Special emphasis is placed on the role of the Jacobson radical and the right singular ideal within these rings. All results are supported by rigorous proofs, and illustrative examples are provided to clarify the theoretical findings.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الحلقات النقية المعدومة الرباعية القوى

رسالة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في
الرياضيات / الرياضيات البحتة

من قبل

محمد اسماعيل جمعه سلمان

بإشراف

الاستاذ الدكتور نزار حمدون شكر محمود

المستخلص

يقال للحلقات انها رباعية القوى اذا كانت تحقق العلاقة $x^4 = x$ لكل $x \in R$. نقوم في هذه الرسالة بتحديد الخصائص الاساسية للحلقات رباعية القوى . كما تم تعميم مفهوم الحلقة الرباعية القوى حيث ان مربع كل عنصر يكون رباعي القوى. ثم قمنا بدراسة الخصائص الهيكلية الاساسية لهذه الحلقات بالتفصيل . قد تمت دراسة العلاقات بين الحلقات رباعية القوى المعممة والحلقات الاخرى مثل الحلقات النقية الثنائية عديمة القوى. علاوة على ذلك تقدم الرسالة وتبحث في الحلقات المعممة رباعية القوى الصفرية ، مع التركيز بشكل خاص على دور جذري جاكوبسون والمثال المفرد الايمن داخل هذه الحلقات. جميع النتائج مدعومة ببراهين دقيقة وقمنا بوضع امثلة توضيحية لتوضيح النتائج النظرية