

**Ministry of Higher Education and  
Scientific Research  
University of Mosul  
College of Computer Science and  
Mathematics  
Department of Mathematics**



# **Analytical Solutions and the General Characteristics for the Prey-Predator System of Stochastic Differential Equations**

**A Thesis Submitted to the Council of the College of  
Computer Science and Mathematics  
University of Mosul  
as a Partial Fulfillment of Requirements  
for the Degree of Doctor of Philosophy in  
Mathematics / Computational Mathematics**

**By  
Warif Badir Bassim Al-bagari**

**Supervised by  
Prof. Dr. Abdulghafoor Jasim Salim**

# ABSTRACT

This thesis aims to study the stochastic differential system through one of its distinctive applications, which is the prey-predator model, that is considered one of the most important systems in the field of biomathematics. The study begins by presenting the biological and mathematical concepts related to ecosystems as well as explaining how population growth models develop over time. Ecosystems are affected by many influences, which leads to a change in their dynamics. On this basis, two new effects are proposed, Hide-and-Escape effect for the prey and Predation Skill Augmentation effect of the predator. These two effects are explained from the biological side and a detailed illustration is given on how to model them mathematically, also how to integrate them into prey-predator model in a competitive manner, which led to the formation of the deterministic prey-predator system. A comprehensive analysis of the resulting deterministic model is presented after adding the effects, starting with ensuring the boundedness and the stability of the system, studying the conditions of coexistence and extinction for Kolmogorov, and analyzing the bifurcation behavior at one of its parameters. Stochastic processes are also integrated into the system, as it is assumed that stochastic processes affect the growth rate of prey and predators, which led to the formation of a stochastic prey-predator system. The stochastic model is analyzed, and the existence and uniqueness of the solution is verified, and that the system is bounded. The permanence conditions of the system are also studied, as well as the conditions for persistence and extinction, using the stochastic analysis tools. Finally, numerical simulations of the two previous systems are presented, where the conditions and theories reached are verified using MATLAB.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الموصل  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
قسم الرياضيات

# الحلول التحليلية والصفات العامة لنظام الفريسة-المفترس للمعادلات التفاضلية التصادفية

اطروحة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل  
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في  
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

وارف بدر باسم يحيى البجاري

باشراف

أ.د. عبدالغفور جاسم سالم

## أَلْمُسْتَلْخَص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة النظام التفاضلي العشوائي من خلال أحد تطبيقاته المميزة وهو نموذج الفريسة والمفترس والذي يعتبر من أهم الأنظمة في مجال الرياضيات الحيوية. تبدأ الدراسة بعرض المفاهيم البيولوجية والرياضية المتعلقة بالنظم البيئية بالإضافة إلى شرح كيفية تطور نماذج النمو السكاني مع مرور الوقت. تتأثر النظم البيئية بالعديد من المؤثرات مما يؤدي إلى تغير في ديناميكياتها. على هذا الأساس، تم اقتراح تأثيرين جديدين، تأثير "الاختباء والهروب" للفريسة وتأثير "تعزيز مهارة الافتراس" للمفترس. تم شرح هذين التأثيرين من الجانب البيولوجي وتوضيح كيفية نمذجتهما رياضياً، وأيضاً كيفية دمجهما في نموذج الفريسة المفترسة بطريقة تنافسية، مما أدى إلى تكوين نظام الفريسة المفترسة الحتمي. تم إجراء تحليل شامل للنموذج الحتمي بعد إضافة التأثيرين بدءاً من التأكد من أن النظام مقيد ومستقر، ثم دراسة شروط كولموغوروف للتعايش والانقراض، كذلك تحليل التشعب لأحد معالم النظام. بعد ذلك تم دمج العمليات العشوائية في النظام، على افتراض أنها تؤثر على النمو السكاني للفريسة والمفترس، مما أدى إلى تكوين نظام الفريسة والمفترس العشوائي. يتم تحليل النموذج العشوائي والتحقق من وجود الحل وتفردته وكذلك أن النظام مقيد. كما تمت دراسة شروط ديمومة النظام وشروط استمراره وانقراضه باستخدام أدوات التحليل العشوائي. وأخيراً تم عرض المحاكاة العددية للنظامين السابقين، حيث تم التحقق من الشروط والنظريات التي تم التوصل إليها باستخدام برنامج MATLAB.