

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics



Applications of Algebraic Geometry in Coding Theory over $PG(3,q)$, where $2 \leq q \leq 997$

A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Pure

By
Hamid Mohammed Khalaf AL-Ali

Supervised by
Professor
Dr. Nada Yassen Kasm Yahya

Abstract

The purpose of this study is to use algebraic geometry applications as parameters in constructing perfect linear codes in coding theory.

In this study, a computer program is designed to find the subspaces of $PG(3, q)$, the program is generalized in order to find the maximum complete caps $m_2(3, q)$ in $PG(3, q)$, when q is prime, $2 \leq q \leq 997$, as shown in (Appendix A.3). We have set corollaries (2.4.1, ..., 2.4.7) to determine the values of $m_2(3, q)$. Since a geometric method is used here to find the complete (K, r) -cap. On any line there are at most r points in $PG(3, q)$. As an example, $PG(3, 17)$ is taken, where we found (K, r) -cap, $2 \leq r \leq 18$ in $PG(3, 17)$. The study has demonstrated practically and theoretically that $m_2(3, 17) = 67$, which is an oval, called an ovaloid.

Moreover, by applying a geometric method and with the help of a computer program, we found the maximum complete span of $PG(3, 13)$, which is called a spread, by constructing the (K, ℓ) -span, $1 \leq \ell$, as one of the applications of algebraic geometry. In this regard, the study demonstrated practically and theoretically that the spread in $PG(3, 13)$ is $(170, \ell)$ -span, as shown in theorem (3.4.1).

The central problem in the coding theory is to find the parameters of the linear codes of a fixed set with dimension $p = 4$, minimum weight d and order q of the finite field through which the code is defined. In this respect, in this study we have determined the shortest length of $m_2(3, q)$, as well as, maximum (K, ℓ) -span to construct new codes with d -weight and the relationships between linear codes, $m_2(3, q)$ and maximum (K, ℓ) -span over a finite prime field. After finding its weight distribution, the study has investigated these codes and indicated its perfect codes and projective codes. These perfect codes are appeared for the first time in this study, as shown in (4.4), (4.7) and (4.8).

Abstract

We have set a general rule for finding the perfect linear codes arising from maximum (K, ℓ) -span, as shown in the corollary (4.8.1). After defining and studying the perfect linear codes, we used a geometric method through the projective geometry, which is the Geometric puncturing, where we created new perfect linear codes arising from the old codes and bearing the same qualities. In this method, we relied on the h -fold simplex code, which was generated from $[h\theta_{p-1}, p, hq^{p-1}]_q$ -code.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

تطبيقات الهندسة الجبرية في نظرية الترميز على $PG(3,q)$ عندما $2 \leq q \leq 997$

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ البحتة

من قبل

حامد محمد خلف العلي

بإشراف

الاستاذ الدكتورة ندى ياسين قاسم يحيى

المستخلص:

الهدف من هذه الدراسة هو استخدام تطبيقات الهندسة الجبرية كمعلومات في انشاء الرموز الخطية التامة في نظرية الترميز.

في هذه الدراسة، تم تصميم برنامج حاسوبي لإيجاد الفضاءات الجزئية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي البعد $(PG(3, q))$ ، ومن ثم بعد ذلك، قمنا بتعميم هذا البرنامج لإيجاد أعظم الأغطية التامة $m_2(3, q)$ في $PG(3, q)$ عندما تكون q أولي، $2 \leq q \leq 997$ ، كما موضح في (Appendix A.3). لقد وضعنا نتائج (Coorollaries(2.4.1, ..., 2.4.7)) لتحديد قيمة $m_2(3, q)$ ولقد استخدمنا طريقة هندسية، لإيجاد الغطاء التام (K, r) -cap. على الأغلب يكون r من النقاط على أي خط في $PG(3, q)$. وقد أخذنا $PG(3, 17)$ كمثال على ذلك، حيث وجدنا (K, r) -cap، لكل $2 \leq r \leq 18$ في $PG(3, 17)$. وقد اثبتنا عمليا ونظريا أن $m_2(3, 17) = 67$ والتي تمثل شكل بيضوي ويسمى اهليجي.

علاوة على ذلك، بتطبيق طريقة هندسية وبالإستعانة ببرنامج حاسوبي وجدنا أعظم امتداد تام لـ $PG(3, 13)$ والذي يدعى ناشر وذلك ببناء $(K, \ell) - \text{span}$ ، $1 \leq \ell$ وهو أحد تطبيقات الهندسة الجبرية. وقد اثبتنا عمليا و نظريا أن أعظم امتداد في $PG(3, 13)$ هو $(170, \ell) - \text{span}$ كما موضح في النظرية (3.4.1).

تتمثل المشكلة المركزية في نظرية الترميز في ايجاد معلومات الرموز الخطية لمجموعة ثابتة ببعد $p = 4$ والحد الأدنى للوزن d والرتبة q للحقل المنتهي الذي يتم من خلاله تعريف الرمز، حيث قمنا في دراستنا هذه بتحديد أقصر طول بـ $m_2(3, q)$ وكذلك $(K, \ell) - \text{span}$ وذلك لإنشاء رموز خطية جديدة ذات وزن d وتكوين علاقات بين الرموز الخطية و $m_2(3, q)$ و $(K, \ell) - \text{span}$ على

حقول أولية منتهية وإيجاد التوزيع الوزني لها ثم دراسة هذه الرموز والأشارة الى أنها رموز تامة وإسقاطية. حيث ظهرت هذه الرموز لأول مرة من خلال هذه الدراسة كما موضح في (4.4) و (4.7) و (4.8). وقد وضعنا قاعدة عامة لإيجاد الرموز الخطية التامة الناشئة من $\text{span} - (K, \ell)$ كما موضح في النتيجة (4.8.1).

بعد تحديد الرموز الخطية التامة ودراستها قمنا باستخدام طريقة هندسية من خلال الهندسة الإسقاطية وهي طريقة التعطيب حيث قمنا بإنشاء رموز خطية تامة جديدة ناشئة من الرموز القديمة وتحمل نفس الصفات. حيث اعتمدنا في هذه الطريقة على الترميز البسيط h -fold simplex code ، الذي تم انشاءه من $[h\theta_{p-1}, p, hq^{p-1}]_q$.