ON THE NUMERICAL SOLUTION OF SYSTEM OF NONLINEAR PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A Thesis Submitted
To
The Council of the College of
Computers Sciences and Mathematics
University of Mosul

As
A partial Fulfillment of the Requirements
For The Degree of Doctor of Philosophy
In
Mathematics

By
Abdulghafor Mohammad Amin Al-Rozbayani
(M.Sc.2000)

Supervised
By
Prof. Dr. Abbas Younis Al-Bayati
Assist. Prof. Dr. Saad Abdallah Manaa

2006 A. C. **1427 A. H.**

ABSTRACT

In this thesis, we studied stability, convergence and consistency for the numerical methods of a model of system nonlinear parabolic partial differential equations. To find the numerical solution of the above problem two types of methods have been considered:

Type one: A method which deals with the original model that is the system of nonlinear parabolic partial differential equations, in which we discretire both the spatial derivatives and time derivative with the use of finite difference operator and then we consider the following methods:

- ADE finite difference method.
- ADI finite difference method.
- Hopscotch finite difference method.

Type two: Transforming the original model of NPPDEs , by using method of lines to a system of ODEs, and then we use numerical methods such as ERK and IRK methods to find the numerical solutions.

In chapter two we use two types of numerical methods to investigate propagating heat solutions of PDEs, the explicit finite difference method and Crank-Nicolson method, and our numerical results show that Crank-Nicholson method produce more accurate numerical solution than the explicit finite difference method. This is due to that C-N has a longer region of stability than explicit finite difference method.

As an illustration we apply the above methods to autocatalytic reaction diffusion equations involving two diffusing chemicals in one dimension.

Also we studied in this chapter the numerical stability of the explicit and implicit (C-N) methods with the aid of Fourier (Von-Neumann) method. The resulting analysis showed that the explicit method was conditionally stable,

but it is consistent, thus the method is conditionally convergent. However, (C-N) method is unconditionally stable and consistent, and thus it is convergent.

In chapter three we studied the stability of steady state solutions using Fourier mode and we showed that the solutions are unconditionally stable.

In chapter four, we study three types of finite difference methods, in detail, to find the numerical solution of reaction difference systems of PDEs in two dimensions. These methods are ADE, ADI and Hopscotch, where Gray-Scott model in two dimensions has been considered. Our numerical results show that the ADI method produces more accurate and stable solution than ADE method and Hopscotch method is the best. Also we studied the consistency, stability and convergence of the above methods.

In chapter five, we consider a transformation type method to find the numerical solution of Gray-Scott model in two-dimensional space which is a system of non-linear parabolic partial differential equations. We transform the original model (system of non-linear PPDEs), by using the method of lines, to a system of ODEs. Thus we can use Runge-Kutta type methods (Explicit RK method and Implicit RK method) to find the numerical solutions of the new systems. We compared between these methods, and we concluded that the numerical results obtained from using IRK methods is more accurate than the numerical results of ERK method. Also we study in this chapter the consistency, stability and convergence of these methods.

Finally, We believe that this thesis will show that there is a lot of future research work that can be done in this area, such as the development of robust and reliable method, code, for finding a stable numerical solution of the above problem.

حول الحل العددي لنظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء

أطروحة مقدمة إلى

مجلس كلية علوم الحاسبات والرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة

دكتوراه فلسفة

في

الرياضيات

من قبل

عبدالغفور محمد أمين الروژبياني

(ماجستير ٢٠٠٠)

بإشراف

الأستاذ الدكتور عباس يونس البياتي

الأستاذ المساعد الدكتور سعد عبدالله منـّاع

١٤٢٧ هـ ٢٠٠٦ م

الملخص

فـي هـذه الأطروحـة نـدرس استقرارية وتقارب وثبوتية الطرق العددية لنظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء. ولايجاد الحل العددي للمسألة أعلاه هناك نوعين من الطرق:

النوع الأول: طرق تتعامل مع النموذج الأصلي, أي مع المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء. الذي أهتمينا به هو تحويل كلتا المشتقات الخاصة والاشتقاق الزمني باستعمال خاصية الفروقات المنتهية, وهذه الطرق هي كالآتي:

- طريقة المتجهات المتعاقبة الصريحة (ADE).
- طريقة المتجهات المتعاقبة الضمنية (ADI).
- طريقة (Hopscotch).

النوع الثاني: باستخدام طرق شبه التقطيعات (method of lines), حيث يحول النموذج الأصلي الذي يتكون من نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء إلى أنظمة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية, ثم نستعمل طرق عددية مثل طريقة رانج–كتا الصريحة و طريقة رانج–كتا الضمنية لإيجاد الحلول العددية للأنظمة الجديدة.

في الفصل الثاني, استخدامنا طريقتين عدديتين لتقصي الحلول العددية لنظام من المعادلات التفاضلية الجزئية, وهما طريقة الفروقات المنتهية الصريحة والضمنية (كرانك – نيكولسون), وتبين من نتائجنا العددية, أن طريقة (كرانك – نيكولسون) الضمنية تعطي نتائج أكثر دقة من النتائج العددية في الطريقة الصريحة, وهذا يعني بأن استقرارية المنطقة بطريقة (كرانك – نيكولسون) الضمنية اكبر من منطقة الاستقرارية بطريقة الفروقات المنتهية الصريحة. للتوضيح طبقنا الطرق أعلاه على معادلات انتشار التفاعل ذات الحافز الذاتي يحتوي على نشر المواد الكيمياوية في البعد الواحد. كذلك درسنا في هذا الفصل الأستقرارية العددية للطريقة الصريحة والضمنية بواسطة طريقة فورير (فون–نيومان). وتبين لدينا من خلال النتائج التحليلية بأن الطريقة

الصريحة كانت مستقرة بشكل مشروط, ولكنه ثابت وبالتالي تكون متقاربة بشكل مشروط. على أية حال فأن طريقة (كرانك – نيكولسون) الضمنية مستقرة وثابتة وبالتالي هي متقاربة.

في الفصل الثالث درسنا استقرارية الحلول اللازمنية باستخدام تحليل الاستقرارية من النمط فورير, وتبين لدينا أن الحلول مستقرة على نحو مشروط.

الملخص

في الفصل الرابع ندرس ثلاث أنواع من الطرق الفروقات المنتهية, وبالتفصيل, لايجاد الحل العددي لنظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء في بعدين, هذه الطرق هي طريقة المتجهات المتعاقبة الصريحة (ADE) وطريقة المتجهات المتعاقبة الضمنية (ADI) وطريقة (Hopscotch) لنموذج Gray-Scott في فضاء ذات بعدين. واستنتجنا من النتائج العددية أن طريقة المتجهات المتعاقبة الضمنية (ADI) هي افضل من طريقة المتجهات المتعاقبة الصريحة (ADE) ولكن بالنتيجة ان طريقة Hopscotch هي افضل من طريقة ADI لأنها لاتحتاج الى خزن كبير بالاضافة الى انها لاتحتوي صيغة المصفوفات الثلاثية الأقطار tridiagonal. كما درسنا ثبوتية وأستقرارية وتقارب لكل من الطرق الثلاثة.

في الفصل الخامس, نستخدم طريقة التحويل لإيجاد الحل العددي لنموذج Gray-Scott في فضاء البعد الثاني, الذي هو نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من نوع القطع المكافيء .نحول النموذج الأصلي إلى باستعمال طريقة الخطوط (Method of Lines) إلى أنظمة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية. ثم استعملنا طرق رانج–كتا (طريقة رانج–كتا الصريحة وطريقة رانج–كتا الضمنية) لإيجاد الحلول العددية للنظم الجديدة. قارنا بين هذه الطرق ولاحظنا إن النتائج العددية التي حصلنا عليها باستعمال وطريقة رانج–كتا الضمنية هي أكثر دقة من نتائج بطريقة رانج–كتا الصريحة. كذلك ندرس في هذا الفصل الأستقرارية و التقارب لهذه الطرق.

أخيراً, نعتقد بأن هذه الأطروحة سوف تبين بأن هناك الكثير من العمل المستقبلي الذي يمكن ان يبحث في هذا الحقل, مثل تطوير الطريقة المتينة والموثوقة, لايجاد الحلول العددية المستقرة من المسألة أعلاه.