



جامعة الموصل  
كلية التربية للعلوم الصرفة

## المجاميع المفتوحة من النمط ic في الفضاءات التبولوجية المثالية

رنا إبراهيم خضر نزال

رسالة ماجستير  
رياضيات

بإشراف  
الأستاذ

الدكتور عامر عبدالإله محمد

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُوا الْأَلْبَابِ ١﴾

سورة الزمر: (9)

صدق الله العظيم

### إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة بـ " المجاميع المفتوحة من النمط ic في الفضاءات التكنولوجية المثالية " جرى بإشرافي في جامعة الموصل / كلية التربية للعلوم الصرفة، وهي جزء من متطلبات شهادة الماجستير في الرياضيات



التوقيع:

المشرف: أ.د. عامر عبدالإله محمد

التاريخ:

### إقرار المقوم اللغوي

أشهد أن هذا الرسالة الموسومة بـ " المجاميع المفتوحة من النمط ic في الفضاءات التكنولوجية المثالية " تمت مراجعتها من الناحية اللغوية وتصحيح ما ورد فيها من أخطاء لغوية وتعبيرية وبذلك أصبحت الرسالة مؤهلة للمناقشة قدر تعلق الأمر لسلامة الأسلوب وصحة التعبير.



التوقيع:

الاسم: أ.د. جمال هازم عباس

التاريخ:

### إقرار لجنة الدراسات العليا

بناءً على التوصيتين التي قدمها كل من المشرف والمقوم اللغوي والمقوم العلمي، أرشح هذه الرسالة للمناقشة.



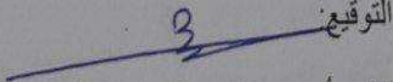
التوقيع:

الاسم: أ.د. عامر عبد الرحمن

التاريخ:

### إقرار رئيس القسم

بناءً على التوصيات التي قدمها كل من المشرف والمقوم اللغوي والمقوم العلمي، أرشح هذه الرسالة للمناقشة.



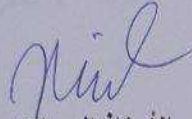
التوقيع:

الاسم: أ.م.د. يونس حازم إسماعيل

التاريخ:

### قرار لجنة المناقشة

نشهد بأننا أعضاء لجنة التقييم والمناقشة قد اطلعنا على هذه الرسالة الموسومة بـ " المجاميع المفتوحة من النمط IC في الفضاءات التوبولوجية المثالية " وناقشنا الطالبة "رنا ابراهيم خضر نزال " في محتوياتها وفيما له علاقة بها بتاريخ 3 / 9 / 2024 أنها جديرة لنيل شهادة الماجستير في الرياضيات .



الأستاذ المساعد

الدكتورة هند يقضان صالح احمد  
كلية التربية الاساس  
جامعة دهوك  
عضواً



الأستاذ المساعد

الدكتورة بيداء سهيل عبدالله  
كلية التربية للعلوم الصرفة  
جامعة الموصل  
رئيساً



الأستاذ

الدكتور عامر عبدالاله محمد  
كلية التربية للعلوم الصرفة  
جامعة الموصل  
عضواً ومشرفاً



المدرس

الدكتورة براءة محمود سليمان  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
جامعة الموصل  
عضواً

### قرار مجلس الكلية

اجتمع مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة بجلسته \_\_\_\_\_ المنعقدة في

وقرر التوصية بمنحه شهادة الماجستير في الرياضيات.

عميد الكلية

أ.د. قيس إسماعيل إبراهيم

مقرر مجلس الكلية

أ.م. د. ياسر يحيى قاسم

2024 / /

2024 / /

## الشكر و الثناء

أتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير والعرفان وعظيم الامتنان إلى أستاذي الفاضل الأستاذ الدكتور " عامر عبدالإله محمد " فقد كانت بصمته الواضحة شرف أعتز به ما حييت وكان له الأثر الأكبر بل كل الأثر في توجيهي وإمدادي بالكثير والكثير من علمه حتى اتممت الرسالة، والشكر موصول إلى جميع أساتذتي وأستاذاتي في جامعة الموصل / كلية التربية للعلوم الصرفة لما قدموه لي من العلم والمعرفة طول مدة الدراسة.

الباحثة

رنا ابراهيم خضر

## المستخلص

تم في هذه الرسالة تقديم أنماط من المجموعات المفتوحة المعممة في فضاءات تبولوجية مثالية وفضاءات تبولوجية معمرة مثالية تحديداً المجموعة المفتوحة من النمط -  $ic$  والمجموعة المفتوحة من النمط -  $icc$  . وتم تسمية هذه الانماط من المجموعات تبعاً للفضاء الذي تكون جزءاً منه واستطعنا أن نحصل على خصائص ومميزات وعلاقات لهذه المجموعات تختلف تماماً عن النتائج التي حصل عليها ( Mohammed, Mohammed, 2023 ) في دراستيهما للمجاميع المفتوحة من النمط -  $i$  والنمط -  $ii$  في الفضاءات المذكورة آنفاً.

## ثبت المحتويات

| الصفحة | الموضوع                                                                                                               |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| أ      | المستخلص                                                                                                              |
| ب      | ثبت المحتويات                                                                                                         |
| ت-ث    | ثبت الرموز                                                                                                            |
| ج      | ثبت الأشكال                                                                                                           |
| 2-1    | المقدمة                                                                                                               |
| 13-3   | الفصل الأول / تمهيد                                                                                                   |
| 3      | 1-1 المقدمة                                                                                                           |
| 8-3    | 2-1 تعاريف وأمثلة وعلاقات لمجاميع مفتوحة معممة في فضاءات تبولوجية اعتيادية وتبولوجية مثالية.                          |
| 13-9   | 3-1 تعاريف وأمثلة وعلاقات لمجاميع مفتوحة معممة في فضاءات تبولوجية معممة و معممة مثالية                                |
| 28-14  | الفصل الثاني/ بعض التطبيقات للمجاميع المفتوحة من النمط - $ic$ في تبولوجيات باستخدام المثاليات                         |
| 14     | (1-2) المقدمة                                                                                                         |
| 28-14  | (2-2) تعاريف ومبرهنات وأمثلة توضيحية عن المجموعات المفتوحة من النمط - $ic$ والنمط - $icc$ في الفضاء التبولوجي المثالي |
| 48-29  | الفصل الثالث/ بعض التطبيقات في الفضاءات التبولوجية المعممة المثالية                                                   |
| 29     | (1-3) المقدمة                                                                                                         |
| 32-29  | (2-3) تعاريف ومبرهنات وأمثلة توضيحية في الفضاء التبولوجي المعمم                                                       |
| 35-33  | (3-3) بديهيات الفصل للأنماط $p$ - المفتوحة من النمط - $ic$ في الفضاء التبولوجي المعمم                                 |
| 48-36  | (4-3) بعض الأنماط من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي.                                           |
| 51-49  | الاستنتاجات والمقترحات                                                                                                |
| 53-52  | المصادر                                                                                                               |

## ثبت الرموز

| الوصف                                                                 | الرمز                                               |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| الفضاء التبولوجي الاعتيادي                                            | $(X, \tau)$                                         |
| الفضاء التبولوجي الاعتيادي                                            | $(Y, \sigma)$                                       |
| الفضاء التبولوجي المثالي                                              | $(X, \tau, \mathfrak{T})$                           |
| الفضاء التبولوجي المعمم                                               | $(M, \psi)$                                         |
| الفضاء التبولوجي المعمم المثالي                                       | $(M, \psi, \mathfrak{T})$                           |
| داخل المجموعة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي                           | $int(A)$                                            |
| انغلاق المجموعة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي                         | $cl(A)$                                             |
| الدالة المحلية                                                        | $A^*$                                               |
| مؤثر انغلاق كوراتوفسكي                                                | $cl^*$                                              |
| مثالية                                                                | $\mathfrak{T}$                                      |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $\alpha$ في الفضاء التبولوجي المثالي         | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $\alpha$         |
| مجموعة شبه مفتوحة في الفضاء التبولوجي المثالي                         | $\mathfrak{T} -$ شبه مفتوحة                         |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $ic$ في الفضاء التبولوجي المثالي             | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $ic$             |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $icc$ في الفضاء التبولوجي المثالي            | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $icc$            |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $\alpha$ الضعيفة في الفضاء التبولوجي المثالي | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $\alpha$ الضعيفة |
| مجموعة شبه مفتوحة ضعيفة في الفضاء التبولوجي المثالي                   | $\mathfrak{T} -$ شبه مفتوحة ضعيفة                   |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $ic$ ضعيف في الفضاء التبولوجي المثالي        | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $ic$ ضعيفة       |
| مجموعة مفتوحة من النمط - $icc$ ضعيف في الفضاء التبولوجي المثالي       | $\mathfrak{T} -$ مفتوحة من النمط - $icc$ ضعيفة      |
| تطبيق مثالي شبه مستمر                                                 | تطبيق $\mathfrak{T} -$ شبه مستمر                    |
| تطبيق مثالي شبه مستمر ضعيف                                            | تطبيق $\mathfrak{T} -$ شبه مستمر ضعيف               |
| تطبيق مثالي مستمر من النمط - $ic$                                     | تطبيق $\mathfrak{T} -$ مستمر من النمط - $ic$        |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم                              | $\psi -$ مفتوحة                                     |
| مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي المعمم                               | $\psi -$ مغلقة                                      |
| فضاء $T_0$ المعمم من النمط $ic$                                       | $\psi T_{0ic}$                                      |
| فضاء $T_1$ المعمم من النمط $ic$                                       | $\psi T_{1ic}$                                      |
| فضاء شبه $T_0$ المعمم                                                 | $\psi T_{0s}$                                       |

|                                                                            |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| داخل المجموعة $A$ في الفضاء التوبولوجي المعمم والمعمم المثالي              | $int_{\psi}(A)$                                         |
| انغلاق المجموعة $A$ في الفضاء التوبولوجي المعمم والمعمم المثالي            | $cl_{\psi}(A)$                                          |
| مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha$ -                                          | $\psi$ - مفتوحة من النمط $\alpha$ -                     |
| مجموعة شبه مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم                              | $\psi$ - شبه مفتوحة                                     |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم من النمط $ic$ -                  | $\psi$ - مفتوحة من النمط $ic$ -                         |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم من النمط $icc$ -                 | $\psi$ - مفتوحة من النمط $icc$ -                        |
| مؤثر انغلاق كوراتوفسكي في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي                 | $cl^{*\psi}(A)$                                         |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $\alpha$ -      | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مفتوحة من النمط $\alpha$ -      |
| مجموعة شبه مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي                      | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ شبه مفتوحة                      |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $ic$ -          | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مفتوحة من النمط $ic$ -          |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $icc$ -         | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مفتوحة من النمط $icc$ -         |
| مجموعة شبه مفتوحة ضعيفة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي                | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ شبه مفتوحة ضعيفة                |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $ic$ - الضعيفة  | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مفتوحة من النمط $ic$ - الضعيفة  |
| مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $icc$ - الضعيفة | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مفتوحة من النمط $icc$ - الضعيفة |
| تطبيق مستمر في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $\alpha$ -        | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مستمر من النمط $\alpha$ -       |
| تطبيق شبه مستمر في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي                        | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ شبه مستمرة                      |
| تطبيق مستمر في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $ic$ -            | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مستمر من النمط $ic$ -           |
| تطبيق مستمر في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي من النمط $icc$ -           | $\psi$ - $\mathfrak{T}$ مستمر من النمط $icc$ -          |
| تطبيق                                                                      | $f$                                                     |
| تطبيق من الفضاء التوبولوجي المثالي الى الفضاء التوبولوجي الاعتيادي         | $f_{\mathfrak{T}}$                                      |
| تطبيق من الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي الى الفضاء التوبولوجي المعمم     | $f_{\psi}$                                              |
| الصورة العكسية للمجموعة $V$                                                | $f^{-1}(V)$                                             |

## ثبت الأشكال

| الصفحة | الشكل          |
|--------|----------------|
| 5      | المخطط (1-2-1) |
| 18     | المخطط (1-2-2) |
| 28     | المخطط (2-2-2) |
| 32     | المخطط (1-2-3) |
| 35     | المخطط (1-3-3) |
| 35     | المخطط (2-3-3) |
| 41     | المخطط (1-4-3) |
| 47     | المخطط (2-4-3) |

## المقدمة

تم تقديم مفهوم المثالية في الفضاءات التوبولوجية لأول مرة من (Vaidyanathaswamy, 1960) و (Kuratowski, 2014). لاحقاً، تم تطوير هذا المفهوم من العديد من الباحثين منهم (Jankovic, Hamlett, 1990) و (Manoharan, 2013) و (Thangavelu, 2023) و (Mohammed, Mohammed, 2023). مؤخراً تم تقديم أصناف جديدة من المجموعات المفتوحة يطلق عليها مجموعة مفتوحة من النمط -  $ic$  ومفتوحة من النمط -  $icc$  من (Abdullah, Askandar, Mohammed, 2022) في الفضاء التوبولوجي الاعتيادي. ونحن في هذه الرسالة عممنا مفهوم المجموعات المفتوحة من النمط -  $ic$  والنمط  $icc$  في فضاءات توبولوجية أخرى مثل الفضاء التوبولوجي المثالي، الفضاء التوبولوجي المعمم والفضاء التوبولوجي المعمم المثالي. لقد قسمنا هذه الرسالة على ثلاثة فصول، الفصل الأول يتكون من ثلاثة بنود، وأن يكون البند الأول مخصصاً لإعطاء مقدمة على ما سنقوم بعرضه في الفصل الأول. أما في البندين الثاني والثالث فاستعرضنا فيها التعاريف الأساسية للمجاميع المفتوحة التي لها علاقة مباشرة بموضوع دراستنا وهي المجموعات المفتوحة من النمط -  $\alpha$ ، شبه المفتوحة، المفتوحة من النمط -  $ic$  والمفتوحة من النمط -  $icc$ ، وقمنا بإعطاء أمثلة تطبيقية التي توضح العلاقة بين هذه الأصناف وكذلك تطرقنا إلى بعض الخصائص والمميزات لهذه الأصناف، مثل الاستمرارية التي ستركز دراستنا عليها، وفي الفصل الثاني تم تقديم أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة في فضاءات توبولوجية مثالية يطلق عليهم  $\mathcal{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ ،  $\mathcal{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ ، كما قمنا بدراسة خصائص هاتين المجموعتين بشكل مفصل مثل الاستمرارية والاستمرارية الضعيفة وكذلك استطعنا أن نجد العلاقة بين هاتين المجموعتين مع مجاميع أخرى وهي المجموعة  $\mathcal{T}$ -مفتوحة من النمط -  $\alpha$  و  $\mathcal{T}$ -شبه مفتوحة وأعطينا العديد من الأمثلة التطبيقية التي توضح هذه العلاقة ومن أهم النتائج التي حصلنا عليها في هذا الفصل:

- مبرهنة (2-2-4) إذا كان  $G \subset \mathcal{X}$ ، فإن كل مجموعة مفتوحة هي  $\mathcal{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.
- مبرهنة (2-2-28) ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathcal{T})$  فضاءاً توبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءاً توبولوجياً، فإن كل تطبيق مستمر من  $(\mathcal{X}, \tau, \mathcal{T})$  إلى  $(Y, \sigma)$  يكون تطبيق  $\mathcal{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

أمّا في الفصل الثالث والأخير فسنكمل ما بدأنا به في الفصل الثاني إذ إننا قسمنا هذا الفصل على أربعة بنود، البند الأول كما في بقية الفصول يتضمن مقدمة عما سيتم تقديمه في هذا الفصل، و خلال البنود الثلاثة المتبقية، ففي البند الثاني عرفنا فيه صنفين جديدين من المجموعات المفتوحة وهي  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ ،  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ ، في الفضاءات التوبولوجية المعممة ودرسنا هذين الصنفين بشكل مفصل واستطعنا أن نحصل على علاقات مع مجاميع مفتوحة معرفة سابقاً كذلك استطعنا أن نحصل على مبرهنات مهمة منها:

- مبرهنة (10-2-3) كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  في  $M$  تكون  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.

أمّا البند الثالث فقد اختص بدراسة بديهيات الفصل للأنماط  $\psi$ -المفتوحة من النمط -  $ic$  في الفضاء التوبولوجي المعمم بشكل مفصل فقد قمنا بتعريف الفضاء  $\psi T_{0ic}$  والفضاء  $\psi T_{1ic}$  وحصلنا على العلاقة بين هذين الفضاءين والفضاء  $\psi T_{1s}$  وعززناها بالأمثلة وكما حصلنا على المبرهنة التي تبين العلاقة بين هذين الفضاءين وهي كالآتي:

- مبرهنة (6-3-3) ليكن  $(M, \psi)$  فضاءً توبولوجياً معمماً فإن كل  $\psi T_{1ic}$  هو  $\psi T_{0ic}$ .

والبند الرابع والأخير فقد اختص بدراسة وعرض وتحليل الأصناف  $\psi$ -المفتوحة من النمط -  $ic$ ،  $\psi$ -المفتوحة من النمط -  $icc$  في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي، إذ قمنا بدراسة خصائص هذين الصنفين في الفضاء المذكور آنفاً وحصلنا على العديد من النتائج معززة بالأمثلة نورد بعضها منها:

- مبرهنة (6-4-3) أي مجموعة محتواه في مجموعة  $\psi$ -مغلقة في الفضاء التوبولوجي المعمم المثالي  $(M, \psi, \mathfrak{I})$  تكون مجموعة  $\psi - \mathfrak{I}$  مغلقة من النمط -  $ic$ .

وأخيراً نود أن نشير إلى أن معظم النتائج التي حصلنا عليها في هذه الرسالة نشرت في

1- R. I. Khider and A. A. Mohammed, " Application of ic-open Sets in Topologies Via ideals". Al- Rafidain Journal of Science and Mathematics, 2024.

2- R. I. khider and A. A. Mohammed, " Some New Open Sets in Ideal Generalized Topological Spaces" International Conference for Physics and Advance Computation Sciences (ICPAS\_2024)

# الفصل الأول

تمهيد

preliminarie

## 1-1 المقدمة

في هذا الفصل سنستعرض أنواع من المجموعات المفتوحة المعممة مع علاقتهم ببعضهم البعض تحديداً: المجموعة شبه المفتوحة، المفتوحة من النمط  $\alpha$ ، المفتوحة من النمط  $ic$  و المفتوحة من النمط  $icc$ . هذه الأنواع من المجموعات المفتوحة ستكون محور دراستنا في هذه الرسالة، وسنرمز للفضاء التوبولوجي الاعتيادي بالرمز  $(\mathcal{X}, \tau)$ ، والفضاء التوبولوجي المثالي بالرمز  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  والفضاء التوبولوجي المعمم بالرمز  $(M, \psi)$  والفضاء التوبولوجي المعمم المثالي  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  وأحياناً سنكتب  $M, \mathcal{X}$  للدلالة على الفضاء إن لم يكن هنالك التباس.

## 2-1 تعاريف وأمثلة وعلاقات لمجاميع مفتوحة معممة في فضاءات توبولوجية اعتيادية وتوبولوجية مثالية.

في هذه الفقرة سوف نقدم بعض التعاريف والمصطلحات الأساسية، فضلاً عن تقديم بعض الأمثلة التوضيحية التي تسهم في فهم هذه الرسالة.

### تعريف (1-2-1)

ليكن  $A \subset \mathcal{X}$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ  $A$ :

1- شبه مفتوحة إذا كان  $A \subset cl(int(A))$  (Levine, 1963).

2- مفتوحة من النمط  $\alpha$  إذا كان  $A \subset int(cl(int(A)))$  (Njasted, 1965).

3- مفتوحة من النمط  $ic$  إذا وجدت مجموعة مغلقة  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  إذ إن  $F \cap A \subseteq int(A)$ . متممة المجموعة المفتوحة من النمط  $ic$  هي مجموعة مغلقة من النمط  $ic$ . (Abdullah, Askander, Mohammed, 2022).

4- مفتوحة من النمط  $icc$  إذا كانت  $A$  مجموعة المفتوحة من النمط  $ic$  و  $int(A) = G$  إن  $G \in \tau \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ . متممة المجموعة المفتوحة من النمط  $icc$  هي مجموعة مغلقة من النمط  $icc$ . (Abdullah, Askander, Mohammed, 2022).

ملاحظة (2-2-1) (Abdullah, Askander, Mohammed, 2022)

لا توجد علاقة بين المجموعات المفتوحة من النمط -  $\alpha$  وشبه المفتوحة في الفضاء التوبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  مع المجموعات المفتوحة من النمط -  $ic$  والمجموعات المفتوحة من النمط -  $icc$ .

مثال (3-2-1)

ليكن  $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$  عندئذ نحصل على أنه:

-a إذا كانت  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}, \{b, c\}\}$  وليكن  $A = \{a, b\}$  فإن المجموعة  $A$

- 1- مفتوحة من النمط -  $ic$ .
- 2- مفتوحة من النمط -  $icc$ .
- 3- ليست مفتوحة من النمط -  $\alpha$ .
- 4- ليست شبه مفتوحة.

الحل. يلاحظ أن:

$$1. F \cap A = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \subseteq \text{int}(\{a, b\}) = \{a\}$$

$$2. A = \{a, b\} \text{ مفتوحة من النمط - } ic \text{ و } \text{int}(\{a, b\}) = \{a\} \in \tau$$

$$3. A = \{a, b\} \not\subseteq \text{int}(cl(\text{int}(\{a, b\})) = \{a\}$$

$$4. A = \{a, b\} \not\subseteq cl(\text{int}(\{a, b\})) = \{a\}$$

-b إذا كانت  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}, \{a, b\}\}$  وليكن  $A = \{a, c\}$  فإن المجموعة  $A$

- 1- ليست مفتوحة من النمط -  $ic$
- 2- ليست مفتوحة من النمط -  $icc$
- 3 - مفتوحة من النمط -  $\alpha$
- 4- شبه مفتوحة.

الحل. يلاحظ إن :

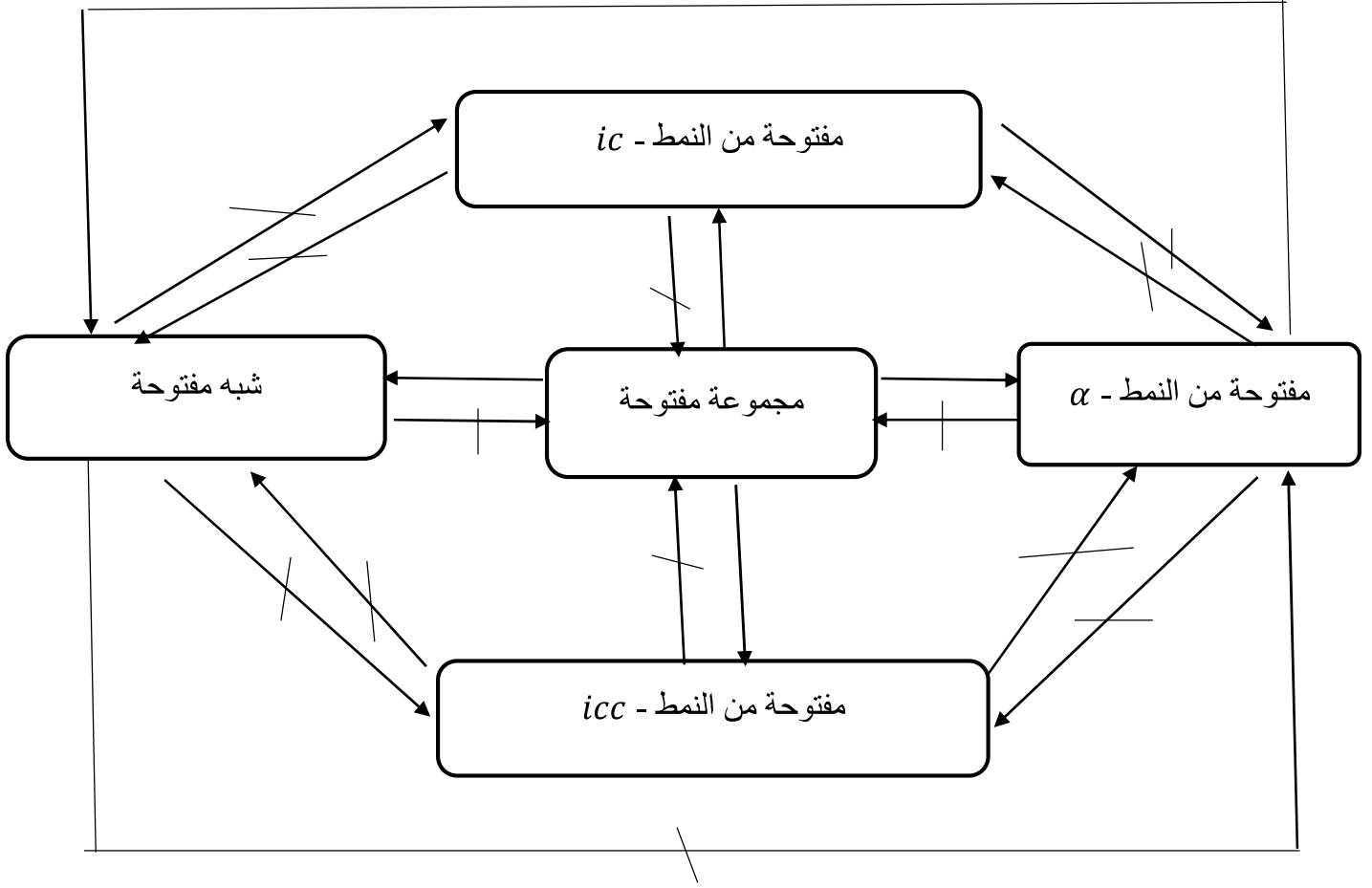
$$1. F \cap A = \{b, c\} \cap \{a, c\} = \{c\} \not\subseteq \text{int}(\{a, c\}) = \{a\}$$

$$2. \text{وذلك لأن } A \text{ ليست مفتوحة من النمط - } ic$$

$$3. A = \{a, c\} \subset \text{int}(cl(\text{int}(\{a, c\}))) = \mathcal{X}$$

$$4. A = \{a, c\} \subset cl(\text{int}(\{a, c\})) = \mathcal{X}$$

يمكن توضيح العلاقة بين المجموعات المفتوحة أعلاه بالمخطط الآتي:



المخطط (1-2-1)

تعريف (4-2-1) (Pervin, 1985)

الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  يسمى

1 - فضاءً  $T_0$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  توجد مجموعة مفتوحة تحوي أحدهما ولا تحوي على الأخرى.

2- فضاءً  $T_1$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  يوجد زوج من المجموعات المفتوحة أحدهما تحوي  $x$  ولا تحوي  $y$  والأخرى تحوي  $y$  ولا تحوي  $x$ .

### مثال (5-2-1)

ليكن  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}, \{b\}\}$ ,  $\mathcal{X} = \{a, b\}$  فإن  $T_1, T_0$  هي  $\mathcal{X}$  وذلك لأن  
 $\{a\}, \{b\} \in \tau$   
 $a, b \in \mathcal{X}, (a \neq b)$   
 $a \in \{a\}, b \notin \{a\}, b \in \{b\}, a \notin \{b\}$  إذ أن

### تعريف (6-2-1) (Maheshwari, 1975)

الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  يسمى فضاء  $T_{0s}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  توجد مجموعة شبه مفتوحة تحوي أحدهما ولا تحوي على الأخرى.

### تعريف (7-2-1) (Abdullah, Askander, Mohammed, 2022)

الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  يسمى فضاء  $T_{0ic}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  توجد مجموعة مفتوحة من النمط -  $ic$  تحوي أحدهما ولا تحوي على الأخرى.

### تعريف (8-2-1) (Maheshwari, 1975)

الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  يسمى فضاء  $T_{1s}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  يوجد زوج من المجموعات شبه مفتوحة أحدهما تحوي  $x$  ولا تحوي  $y$  والأخرى تحوي  $y$  ولا تحوي على  $x$ .

### تعريف (9-2-1) (Abdullah, Askander, Mohammed, 2022)

الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  يسمى فضاء  $T_{1ic}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $x, y$  في  $\mathcal{X}$  يوجد زوج من المجموعات المفتوحة من النمط -  $ic$  أحدهما تحوي  $x$  ولا تحوي  $y$  والأخرى تحوي  $y$  ولا تحوي على  $x$ .

### تعريف (10-2-1) (kuratowski, 2014)

ليكن  $\mathfrak{T}$  عائلة من المجموعات الجزئية غير الخالية من الفضاء التبولوجي  $(\mathcal{X}, \tau)$  عندئذ يقال بأن  $\mathfrak{T}$  مثالية إذا تحققت الشروط الآتية:

$$1 - A \in \mathfrak{T} \text{ و } B \subseteq A \text{ يؤدي } B \in \mathfrak{T}.$$

$$2 - A \in \mathfrak{T} \text{ و } B \in \mathfrak{T} \text{ يؤدي } A \cup B \in \mathfrak{T}$$

### مثال (11-2-1)

ليكن  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{1\}, \{1, 3\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$  فإن  $\mathfrak{T}$  تمثل مثالية على  $\mathcal{X}$ .

### تعريف (12-2-1)

ليكن  $n \in \mathcal{X}$  فإن الدالة المحلية تطبيق من عائلة المجموعات الجزئية من  $\mathcal{X}$  الى نفسها وتعرف كالآتي  $(A)^*(\mathfrak{T}, \tau) = \{n \in \mathcal{X} : \mathcal{U} \cap A \notin \mathfrak{T} \text{ لكل } \mathcal{U} \in \tau(n)\}$  إذ إن  $A \subseteq \mathcal{X}$  و  $\tau(n) = \{\mathcal{U} \in \tau : n \in \mathcal{X}\}$  ومؤثر انغلاق كوراتوفسكي  $cl^*$  يعرف بواسطة  $cl^*(A) = A \cup A^*$  لاحظ أننا سوف نكتب  $A^*$  بدلا عن  $A^*(\mathfrak{T}, \tau)$ .

### مثال (13-2-1)

ليكن  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}\}$  وليكن  $A = \{2, 3\}$  فإن  $A^* = \{2, 3\}$  وذلك لأن

$$\{1\} \cap \{2, 3\} = \emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow 1 \notin A^*$$

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathfrak{T}, \mathcal{X} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow 2 \in A^*$$

$$\mathcal{X} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow 3 \in A^*$$

### تعريف (14-2-1) (Hatir, Noiri, 2002)

ليكن  $A \subset \mathcal{X}$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ  $A$ :

1- مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$  إذا كان  $A \subset int(cl^*(int(A)))$

2- مجموعة  $\mathfrak{T}$  - شبه مفتوحة إذا كان  $A \subset cl^*(int(A))$

### مثال (15-2-1)

ليكن  $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$  وليكن  $A = \{b, c\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون

1- مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$ ، لأن

$$int(\{b, c\}) = \{b\}, cl^*(\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}^* = \mathcal{X}, int(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

$$\Rightarrow A = \{b, c\} \subset \text{int} \left( cl^*(\text{int}(A)) \right) = \mathcal{X}$$

2- مجموعة  $\mathfrak{T}$  - شبه مفتوحة لأن

$$A = \{b, c\} \subset cl^*(\text{int}(A)) = \mathcal{X}$$

**تعريف (16-2-1)** (Ganster, Jafari, Navalagi, 2002)

التطبيق  $f: (\mathcal{X}, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى تطبيقاً شبه مستمر إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  هي مجموعة شبه مفتوحة في  $(\mathcal{X}, \tau)$ .

**تعريف (17-2-1)** (Hatir, Jafari, 2002)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءاً تبولوجياً، التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى تطبيقاً  $\mathfrak{T}$  - شبه مستمر إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$  - شبه مفتوحة في  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$ .

**قاعدة (18-2-1)** (Hatir, Jafari, 2006)

كل تطبيق مستمر يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - شبه مستمر.

**تعريف (19-2-1)** (Mashhour, Hasanein, El-Deeb, 1983)

التطبيق  $f: (\mathcal{X}, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى تطبيقاً مستمراً من النمط  $\alpha$  - إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  هي مجموعة مفتوحة من النمط  $\alpha$  - في  $(\mathcal{X}, \tau)$ .

**تعريف (20-2-1)** (Hatir, Jafari, 2002)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءاً تبولوجياً، التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى تطبيقاً  $\mathfrak{T}$  - مستمراً من النمط  $\alpha$  - إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مفتوحة من النمط  $\alpha$  - في  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$ .

(3-1) تعريف وأمثلة وعلاقات لمجاميع مفتوحة معممة في فضاءات تبولوجية معممة ومعممة مثالية.

في هذه الفقرة أخذنا تعريف المجموعة المفتوحة من النمط -  $\alpha$  والمجموعة شبه المفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم والفضاء تبولوجي المعمم المثالي ونستخدم هذه التعاريف في دراسة بديهيات الفصل وبعض خواص هذه المجموعات لغرض مقارنتها مع مجاميع أخرى جديدة أسميناها  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  في الفصل الثالث من هذه الرسالة.

تعريف (1-3-1) (Császár, 2002)

ليكن  $M$  مجموعة غير خالية و  $\psi$  عائلة من مجموعات جزئية من  $M$  ، عندئذ تكون  $\psi$  تبولوجيا معممة على  $M$  إذا كان  $\emptyset \in \psi$  واتحاد عناصر  $\psi$  تنتمي الى  $\psi$  . عناصر  $\psi$  تسمى  $\psi$  - مفتوحة و متممها تسمى  $\psi$  - مغلقة.

ملاحظة (2-3-1)

يعرف  $cl_{\psi}(A)$  بأنه تقاطع المجموعات  $\psi$  - مغلقة التي تحوي المجموعة  $A$ . ويعرف  $int_{\psi}$  بأنه اتحاد المجموعات  $\psi$  - مفتوحة المحتواه في  $A$ .

تعريف (3-3-1) (Császár, 2005)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ يقال إن  $A$ :

1-  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$  إذا كان  $A \subset int_{\psi}(cl_{\psi}(int_{\psi}(A)))$

2-  $\psi$  - شبه مفتوحة إذا كان  $A \subset cl_{\psi}(int_{\psi}(A))$

مثال (4-3-1)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $\psi = \{M, \emptyset, \{a, c\}, \{b, c, d\}\}$  وليكن  $A = \{a, b, c\}$  فإن المجموعة  $A$

1- مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$  ، لأن

$$A \subset int_{\psi} \left( cl_{\psi} \left( int_{\psi} (\{a, b, c\}) \right) \right) = int_{\psi} \left( cl_{\psi} (\{a, c\}) \right) = int_{\psi}(M) = M$$

2- مجموعة  $\psi$  - شبه مفتوحة

$$A \subset cl_{\psi} (int_{\psi} (\{a, b, c\})) = cl_{\psi} (\{a, c\}) = M$$

**تعريف (5-3-1)** (Tyagi, Chauhan, 2016)

الفضاء التوبولوجي المعمم  $(M, \psi)$  يسمى

1-  $\psi T_0$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $r, s$  في  $M$  توجد مجموعة  $\psi$ -مفتوحة تحوي أحدهما ولا تحوي الأخرى .

2-  $\psi T_1$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $r, s$  في  $M$  يوجد زوج من المجموعات  $\psi$ -مفتوحة أحدهما تحوي  $r$  ولا تحوي  $s$  والأخرى تحوي  $s$  ولا تحوي  $r$  .

**مثال (6-3-1)**

ليكن  $M = \{c, d\}, \psi = \{\emptyset, M, \{c\}, \{d\}\}$  , فإن  $M$  تكون  $\psi T_0$  و  $\psi T_1$  لأن

$$\{c\}, \{d\} \in \psi$$

$$c, d \in M, (c \neq d)$$

$$c \in \{c\}, d \notin \{c\}, d \in \{d\}, c \notin \{d\}$$

**تعريف (7-3-1)** (Császár, 2004)

الفضاء التوبولوجي المعمم  $(M, \psi)$  يسمى  $\psi T_{0s}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $r, s$  في  $M$  توجد مجموعة  $\psi$  - شبه مفتوحة تحوي أحدهما ولا تحوي الأخرى.

**ملاحظة (8-3-1)** (Császár, 2004)

كل  $T_{0s}$  هو  $\psi T_{0s}$  لأن كل مجموعة شبه مفتوحة هي مجموعة  $\psi$  - شبه مفتوحة .

**تعريف (9-3-1)** (Govindappa, 2001)

الفضاء التوبولوجي المعمم  $(M, \psi)$  يسمى  $\psi T_{1s}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $r, s$  في  $M$  يوجد زوج من المجموعات  $\psi$  - شبه مفتوحة أحدهما تحوي  $r$  ولا تحوي  $s$  والأخرى تحوي  $s$  ولا تحوي  $r$  .

**ملاحظة (10-3-1)** (Govindappa, 2001)

كل  $T_{1s}$  هو  $\psi T_{1s}$  لأن كل مجموعة شبه مفتوحة هي مجموعة  $\psi$  - شبه مفتوحة.

### تعريف (11-3-1) (Császár, 2002)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معممًا مثاليًا وليكن  $v \in M$ . فإن الدالة المحلية تطبيق من عائلته المجموعات الجزئية من  $M$  الى نفسها وتعرف كآلاتي:

$$A \subseteq M \quad \text{إن} \quad \text{إذ} \quad (A)^{* \psi}(\mathfrak{T}, \psi) = \{v \in M : \mathcal{U} \cap A \notin \mathfrak{T} \text{ لكل } \mathcal{U} \in \tau(v)\}$$

و  $\tau(v) = \{\mathcal{U} \in \psi : v \in M\}$  ومؤثر أنغلاق كوراتوفسكي  $cl^{* \psi}$  يعرف بواسطة

$$(A)^{* \psi}(\mathfrak{T}, \psi) = A \cup A^{* \psi} \quad \text{لاحظ أننا سوف نكتب } A^{* \psi} \text{ بدلا عن } (A)^{* \psi}(\mathfrak{T}, \psi).$$

### مثال (12-3-1)

$$\psi = \{\emptyset, M, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}\}, M = \{1,2,3,4\} \text{ ليكن}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \text{ وليكن } A = \{1,2\} \text{ فإن}$$

$$\{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} \notin \mathfrak{T}, \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \notin \mathfrak{T}$$

$$M \cap \{1,2\} = \{1,2\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow 1 \in A^{* \psi}$$

$$\{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \notin \mathfrak{T}, \{2,3,4\} \cap \{1,2\} = \{2\} \in \mathfrak{T} \Rightarrow 2 \notin A^{* \psi}$$

$$3 \notin A^{* \psi}, 4 \notin A^{* \psi}$$

وعليه

$$A^{* \psi} = \{1\}$$

### تعريف (13-3-1) (Hatir, Noiri, 2002)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ  $A$ :

$$1- \psi - \mathfrak{T} \text{ مفتوحة من النمط } - \alpha \text{ إذا كان } A \subset int_{\psi}(cl^{* \psi}(int_{\psi}(A)))$$

$$2- \psi - \mathfrak{T} \text{ شبه مفتوحة إذا كان } A \subset cl^{* \psi}(int_{\psi}(A))$$

### مثال (14-3-1)

ليكن  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, M, \{1,3\}, \{2,3,4\}\}$ ,  $M = \{1,2,3,4\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون:

1- مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $\alpha$

$$A \subset \text{int}_{\psi} \left( cl^{*\psi} \left( \text{int}_{\psi} (\{1,3,4\}) \right) \right) = \text{int}_{\psi} \left( cl^{*\psi} (\{1,3\}) \right) = \text{int}_{\psi} (M) = M$$

2- مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مفتوحة

$$A \subset cl^{*\psi} \left( \text{int}_{\psi} (\{1,2,3\}) \right) = cl^{*\psi} (\{1,3\}) = M$$

الآن نبين كيفية إيجاد  $\{1,3\}^{*\psi}$

$$\{1,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \notin \mathfrak{T}, M \cap \{1,3\} = \{1,3\} \notin \mathfrak{T}$$

$$\Rightarrow 1 \in \{1,3\}^{*\psi}$$

$$\{2,3,4\} \cap \{1,3\} = \{3\} \notin \mathfrak{T}, M \cap \{1,3\} = \{1,3\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow 2 \in \{1,3\}^{*\psi}$$

$$3 \in \{1,3\}^{*\psi}, 4 \in \{1,3\}^{*\psi}$$

وعليه

$$\{1,3\}^{*\psi} = M$$

### قضية (15-3-1) (Shyamapada, 2016)

مؤثر الانغلاق  $cl^{*\psi}$  يحقق مايتي:

$$A \subseteq cl^{*\psi} (A) \quad (1)$$

$$cl^{*\psi} (\emptyset) = \emptyset \text{ و } cl^{*\psi} (M) = M \quad (2)$$

$$cl^{*\psi} (A) \subseteq cl^{*\psi} (B) \quad \text{فإن } A \subseteq B \quad (3)$$

$$cl^{*\psi} (A) \cup cl^{*\psi} (B) \subset cl^{*\psi} (A \cup B) \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{إذا كان } \mathfrak{T} = \{\emptyset\} \text{ فإن } cl^{*\psi} (A) = cl^* (A) \text{ حيث } A \subset M$$

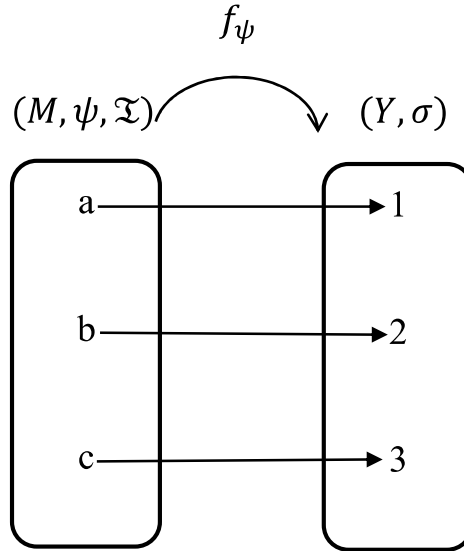
تعريف (16-3-1) (Hatir, Noiri, 2002)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معمماً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءاً تبولوجياً معمماً، التطبيق  $f_\psi: (M, \psi, \mathfrak{T}) \Rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى تطبيق

1-  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $\alpha$  إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $\alpha$  في  $M$ ، لكل  $V \in \sigma$ .

2-  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مستمر إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مفتوحة في  $M$ ، لكل  $V \in \sigma$ .

مثال (17-3-1)



$$\psi = \{\emptyset, \{c\}, M\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$$

$$\sigma = \{Y, \emptyset, \{2,3\}\}$$

$$f^{-1}(\{2,3\}) = \{b, c\} \subset \text{int}_\psi \left( \text{cl}^{\psi} \left( \text{int}_\psi(\{b, c\}) \right) \right) = M$$

$$\text{int}_\psi \left( \text{cl}^{\psi}(\{c\}) \right) = \text{int}_\psi(M) = M$$

لذلك فإن  $f^{-1}(\{2,3\}) = \{b, c\}$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $\alpha$  ومن ثَمَّ فإن  $f$

تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $\alpha$ . وبالطريقة نفسها يمكن البرهنة أنَّ  $f$  تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مستمر.

# الفصل الثاني

بعض التطبيقات للمجاميع المفتوحة من النمط -  
*ic* في تبولوجيات باستخدام المثاليات

## (1-2) المقدمة

في هذا الفصل تم تقديم أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة في فضاءات تبولوجية مثالية يطلق عليهم  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$ ،  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $icc$ ،  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  (الضعيفة)،  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  (الضعيفة)، تم دراسة بعض الخصائص والعلاقات بين هذه الأنماط الجديدة مع الأمثلة، كما تم تقديم مفهوم الاستمرارية في الفضاءات التبولوجية المثالية لهذه الأنماط وعلاقتها مع التطبيقات المستمرة المعروفة سابقاً وهي  $\mathcal{T}$  - شبه المستمرة و  $\mathcal{T}$  - المستمرة من النمط -  $\alpha$ .

(2-2) تعاريف ومبرهنات وأمثلة توضيحية عن المجموعات المفتوحة من النمط -  $ic$  و النمط -  $icc$  في الفضاء التبولوجي المثالي.

### تعريف (1-2-2)

ليكن  $A \subset X$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  إذا وجدت  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, X\}$  بحيث إن  $cl^*(F \cap A) \subseteq int(A)$ . متممة المجموعة  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  هي مجموعة  $\mathcal{T}$  - مغلقة من النمط -  $ic$ .

### تعريف (2-2-2)

ليكن  $A \subset X$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  إذا كانت  $A$  مجموعة  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $int(A) = G$  إذ إن  $G \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$ . متممة المجموعة  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  هي مجموعة  $\mathcal{T}$  - مغلقة من النمط -  $icc$ .

### مثال (3-2-2)

ليكن  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{d\}\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{d\}, \{a, c, d\}\}$ ,  $X = \{a, b, c, d\}$  وليكن  $A = \{a, d\}$  فإن  $A$  تكون مجموعة

1-  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  لأن

$$cl^*(\{b, d\} \cap \{a, d\}) = cl^*(\{d\}) = \{d\} \subseteq int(\{a, d\}) = \{d\}$$

2-  $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  لأن  $A$   $\mathcal{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $int(\{a, d\}) = \{d\}$ .

#### مبرهنة (4-2-2)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة مفتوحة تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان . ليكن  $G \in \tau$  وبهذا فإن  $G = int(G)$  لكن  $F \cap G \subseteq G$  لأي مجموعة مغلقة  $F \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  وبذلك  $F \cap G \subseteq G = int(G)$  نحصل على أنه  $G$  مجموعة مفتوحة من النمط -  $ic$  .  $G^c$  مجموعة مغلقة من النمط -  $ic$  هذا يعني

$$int(G^c) \subseteq F \cap G^c \subseteq cl(F \cap G^c) \subseteq cl^*(F \cap G^c)$$

عندها نحصل على أن  $G^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$  وبهذا فإن  $G$  هي  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

#### مثال (5-2-2)

ليكن  $\mathcal{X} = \{1,3,5\}$  ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{1,5\}, \{3\}\}$  و  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}\}$  وليكن  $A = \{1,3\}$   
 $cl^* (\{3\} \cap \{1,3\}) = cl^* (\{3\}) = \{3\} \subseteq int(\{1,3\}) = \{3\}$   
 الآن نبين كيفية حساب  $\{3\}^*$

$$\{1,5\} \cap \{3\} = \emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow 1,5 \notin \{3\}^*, \{3\} \cap \{3\} = \{3\} \notin \mathfrak{T}$$

$$\mathcal{X} \cap \{3\} = \{3\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow \{3\} \in \{3\}^*$$

وعليه فإن المجموعة  $A$  هي  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكنها ليست مجموعة مفتوحة .

#### مبرهنة (6-2-2)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة مفتوحة تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $G \in \tau$  وحسب مبرهنة (4-2-2) نحصل على أن  $G$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  وبما أن  $int(G) = G$  ، لذلك فإن  $G$  هي  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ .

ولأثبات عكس المبرهنة ينظر إلى المثال (5-2-2) إذ تكون  $A$  هي  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  ولكنها ليست مجموعة مفتوحة .

### مبرهنة (7-2-2)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً إذا كان  $A \subset F \in \tau^c$  فإنَّ المجموعة  $A$  هي  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$ .

البرهان. ليكن  $A \subset F \in \tau^c$

$$\Rightarrow (F \cap A) = A$$

$$\Rightarrow cl^*(F \cap A) = cl^*(A) = A \cup A^*$$

$$\because int(A) \subseteq A \subseteq cl^*(F \cap A)$$

$$\Rightarrow int(A) \subseteq cl^*(F \cap A)$$

لذلك فإنَّ المجموعة  $A$  هي  $\mathfrak{T}$  - مغلقة من النمط -  $ic$ .

### مثال (8-2-2)

ليكن  $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$  وليكن  $A = \{a\}$

عندئذ  $A$  هي  $\mathfrak{T}$  - مغلقة من النمط -  $ic$  لأن

$$A = \{a\} \subset \{a, c\} \in \tau^c$$

$$\Rightarrow int(\{a\}) = \emptyset \subseteq cl^*(\{a, c\} \cap \{a\}) = cl^*(\{a\}) = \{a\} \cup \{a\}^* = \{a\}$$

### ملاحظة (9-2-2)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً فإنه لا توجد علاقة بين المجموعات  $\mathfrak{T}$ -المفتوحة من النمط -  $\alpha$  و  $\mathfrak{T}$  - شبه المفتوحة مع المجموعات  $\mathfrak{T}$ -المفتوحة من النمط -  $ic$  والمجموعات  $\mathfrak{T}$ -المفتوحة من النمط -  $icc$ .

يمكن توضيح الملاحظة أعلاه من خلال المثال الآتي:

ليكن  $\mathcal{X} = \{1, 3, 5\}$  نحصل على أنه

(1) إذا كانت  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{5\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{3\}\}$  وليكن  $A = \{3, 5\}$  فإنَّ  $A$

(a) ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ ، لأن

$$cl^*({1,3} \cap {3,5}) = cl^*({3}) = {3} \cup {3}^* = {3} \not\subseteq {5}$$

الآن نبين كيفية إيجاد  ${3}^*$

$$\mathcal{X} \cap {3} = {3} \in \mathfrak{T} \Rightarrow 1 \notin {3}^*$$

$$\mathcal{X} \cap {3} = {3} \in \mathfrak{T} \Rightarrow 3 \notin {3}^*$$

$${5} \cap {3} = \emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow 5 \notin {3}^*$$

$$\Rightarrow {3}^* = \emptyset$$

(b) ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  لأن  $A$  ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

(c) مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $\alpha$ ، لأن

$$A \subset int(cl^*(int({3,5}))) = int(cl^*({5})) = int(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

(d) مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة، لأن

$$A \subset cl^*(int({3,5})) = cl^*({5}) = {5} \cup {5}^* = \mathcal{X}$$

(2) إذا كانت  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, {1,3}, {5}\}$  وليكن  $A = {3,5}$  فإن  $A$  تكون

(a) مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ ، لأن

$$cl^*({5} \cap {3,5}) = cl^*({5}) = {5} \subseteq int({3,5}) = {5}$$

(b) مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ ، لأن  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  و

$$int({3,5}) = {5}$$

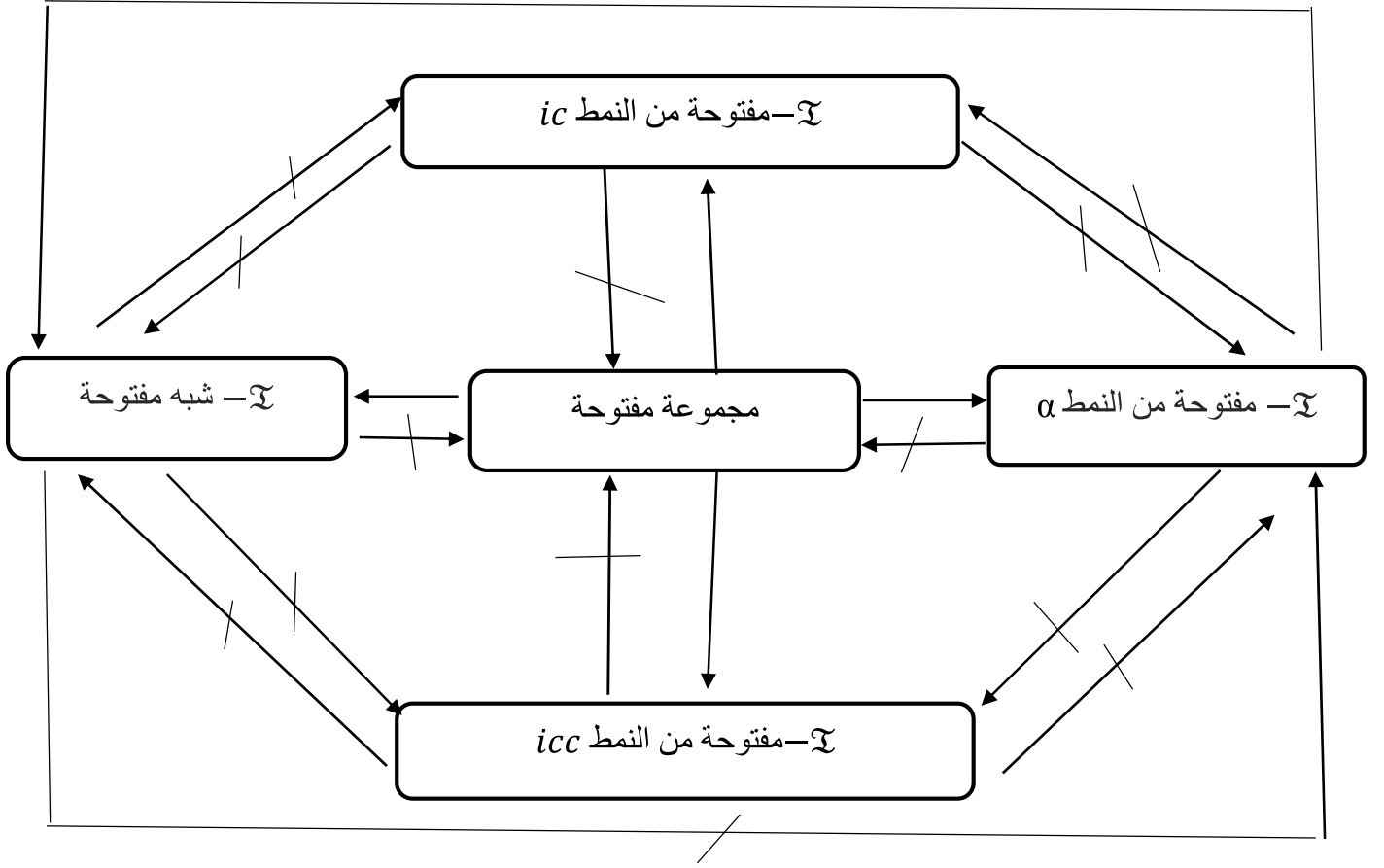
(c) ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $\alpha$ ، لأن

$$A = {3,5} \not\subseteq int(cl^*(int({3,5}))) = {5}$$

(d) ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة، لأن

$$A = {3,5} \not\subseteq cl^*(int({3,5})) = {5}$$

يمكن توضيح العلاقات بين المجموعات المفتوحة المذكورة أعلاه عن طريق المخطط الآتي:



المخطط (1-2-2)

الآن سوف ندرس خواص المجموعات  $\mathcal{X}$ -مفتوحة من النمط  $ic$  و  $\mathcal{X}$ -مفتوحة من النمط  $icc$ .

تعريف (10-2-2)

ليكن  $A \subset X$  مجموعة جزئية غير خالية، عندئذ يقال إن  $A$  هي  $\mathcal{X}$ -مفتوحة من النمط  $ic$  الضعيفة إذا وجدت مجموعة مغلقة  $F \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$  بحيث إن  $cl^*(cl(F \cap A)) \subseteq int(A)$ .

تعريف (11-2-2)

ليكن  $A \subset X$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ يقال إن  $A$  هي  $\mathcal{X}$ -مفتوحة من النمط  $icc$  الضعيفة إذا كانت  $A$  مجموعة  $\mathcal{X}$ -مفتوحة من النمط  $ic$  الضعيفة و  $int(A) = G$  إذ إن  $G \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$ .

### مثال (12-2-2)

ليكن  $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$  ولتكن  $A = \{a, b\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون

1- مجموعة  $\mathfrak{T}$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ، لأن

$$cl^*(cl(\{b\} \cap \{a, b\})) = cl^*(\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}^* = \{b\}$$

$$\Rightarrow \{b\} \subseteq int(\{a, b\}) = \{b\}$$

2- مجموعة  $\mathfrak{T}$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة لأن  $A \in \tau$  وبما إن  $int(\{a, b\}) = \{b\} \in \tau$ .

### مبرهنة (13-2-2)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً توبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة مفتوحة تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $G \in \tau$  وحسب مبرهنة (4-2-2) نحصل على أن  $G^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$  -مغلقة من النمط -  $ic$  هذا يعني أنه توجد مجموعة مغلقة  $F \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  بحيث إن

$$int(G^c) \subseteq cl^*(F \cap G^c) \subseteq cl^*(cl(F \cap G^c))$$

نحصل على أن  $G^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مغلقة من النمط -  $ic$  الضعيفة ومن ثم فإن  $G$  مجموعة  $\mathfrak{T}$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

### مثال (14-2-2)

ليكن  $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$  وليكن  $A = \{b, c\}$  وعليه فإن  $A \in \tau$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة

$$cl^*(cl(\{b, c\} \cap \{d\})) = cl^*(\emptyset) = \emptyset \subseteq int(\{b, c\}) = \{c\}$$

ولكن  $A$  ليست مجموعة مفتوحة.

### مبرهنة (15-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  تكون  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

البرهان. ليكن  $A \subset X$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  فإن  $A^c$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مغلقة من النمط -  $ic$  هذا يعني أنه توجد مجموعة مغلقة  $F \setminus \{\emptyset, X\}$  بحيث إن

$$int(A^c) \subseteq cl^*(F \cap A^c) \subseteq cl^*(cl(F \cap A^c))$$

وبذلك نحصل على أن  $A^c$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$  الضعيفة وبالتالي فإن  $A$  تكون  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

### مبرهنة (16-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  تكون  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة.

البرهان. ليكن  $A \subset X$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  لذا توجد مجموعة  $G \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$  إذ إن  $int(A) = G$ . وبما أن  $A$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  وعليه تكون  $A$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  وحسب المبرهنة (15-2-2) تكون  $A$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ومما سبق نستنتج أن  $A$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة.

### نتيجة (17-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $A \subset X$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة وحسب التعريف (2-2-11) فإن  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

### مثال (18-2-2)

ليكن  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$  وليكن  $A = \{a\}$

$$\tau^c = \{X, \emptyset, \{c\}\}$$

$$cl^*(cl(\{c\} \cap \{a\})) = cl^*(cl(\emptyset)) = \emptyset \subseteq int(\{a\}) = \emptyset$$

وعليه فإن  $A$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ولكن  $A$  ليست مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة.

### نتيجة (19-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجياً مثالياً، فإن كل مجموعة مفتوحة تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $G \in \tau$  و  $G \subset X$  حسب مبرهنة (6-2-2) فإن  $G$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  و حسب مبرهنة (16-2-2) فإن  $G$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة.

### مثال (20-2-2)

ليكن  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{c\}\}$  وليكن  $A = \{a, b\}$

$$\tau^c = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

$$cl^*(cl(\{a\} \cap \{a, b\})) = cl^*(cl(\{a\})) = cl^*(\{a\}) = \{a\}$$

$$\Rightarrow \{a\} \subseteq int(\{a, b\}) = \{a\}$$

وعليه فإن  $A$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة وبما أن  $int(A) = \{a\}$  وعليه تكون  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة ، ولكن المجموعة  $A$  ليست مجموعة مفتوحة.

### مبرهنة (21-2-2)

ليكن  $A \subset X$  في الفضاء التبولوجي المثالي  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فإنه

(1) إذا كانت  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة، فإن  $A^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

(2) إذا كانت  $A$  مجموعة مفتوحة و  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$  ، فإن  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة.

البرهان. (1) نفرض إن  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة هذا يعني  $A \subset cl^*(int(A))$  . إذا  $int(A) \not\subseteq F$  لكل  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, X\}$  وهذا يؤدي الى أن  $int(A) \subseteq F^c$  لكل  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, X\}$  وهذا النوع من التبولوجيا ليس محور اهتمامنا، لذلك  $int(A) \subseteq F$  لبعض  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, X\}$ . وبما أن  $int(A) \subseteq A$  عندها فإن  $int(A) \subseteq (F \cap A)$  لبعض  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, X\}$ .

$F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  والآن عندما  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة نحصل على  $int(A) \subseteq A \subseteq cl^*(F \cap A)$  لبعض  $F \in \tau^c \setminus \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  وبذلك نحصل على أن  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$  وبذلك فإنه  $A^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

(2) نفرض  $A$  مجموعة مفتوحة و  $\mathfrak{T}$ -مغلقة من النمط -  $ic$  ومن ثَمَّ لدينا

$$int(A) = A \subseteq cl^*(F \cap A) \subseteq cl^*(A) = cl^*(int(A))$$

وبهذا نحصل على أنه  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة .

وبتطبيق المثال للمبرهنة أعلاه كما يأتي :

المبرهنة (2-2-21) [1] نحصل على أنه  $A^c$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ . وبحسب  
المبرهنة (2-2-21) [2] نحصل على أنه  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -شبه مفتوحة.

الآن سوف نقدم خاصية الاستمرارية للأنماط  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  في الفضاء التوبولوجي المثالي.

### تعريف (2-2-22)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً توبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءً توبولوجياً، يسمى التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  مستمراً من النمط -  $ic$  إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  في  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$ .

### تعريف (2-2-23)

ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً توبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءً توبولوجياً، يسمى التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  مستمراً من النمط -  $icc$  إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  في  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$ .

### تعريف (2-2-24)

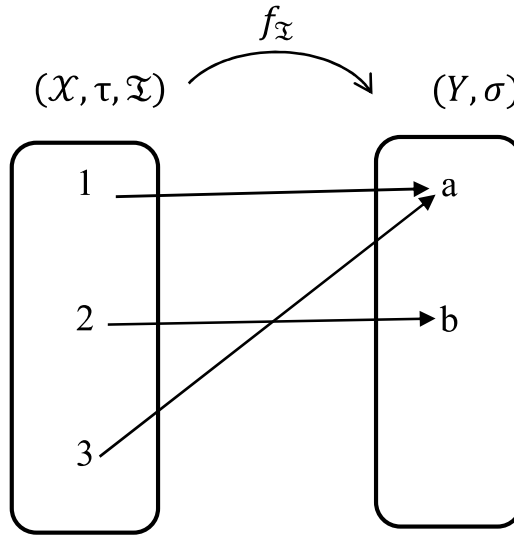
ليكن  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً توبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءً توبولوجياً، يسمى التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  مستمراً من النمط -  $ic$  الضعيفة إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة في  $(\mathcal{X}, \tau, \mathfrak{T})$ .

### تعريف (25-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا مثاليًا و  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجيًا. يسمى التطبيق  $f_{\mathfrak{T}}: (X, \tau, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  -مستمر من النمط -  $icc$  الضعيفة إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في  $(Y, \sigma)$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة في  $(X, \tau, \mathfrak{T})$ .

### مثال (26-2-2)

انظر إلى المخطط الآتي :



$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$$

$$\sigma = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$f^{-1}(Y) = X, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\}$$

بما أن

$$cl^*({1,3} \cap {1}) = {1} \subseteq int({1,3}) = {1}$$

وعليه فإن  $f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\}$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  وكذلك حسب مبرهنة (15-2-2) وبذلك فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$ ،  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  الضعيفة، وأيضاً  $f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\}$  تكون مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  وكذلك

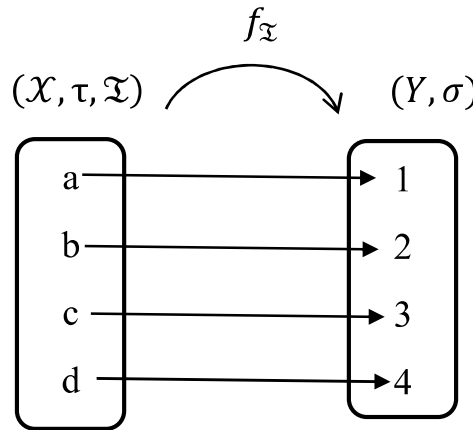
حسب مبرهنة (16-2-2) وبذلك فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $icc$ ،  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $icc$  الضعيفة.

### مبرهنة (27-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجياً مثالياً و  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجياً، فإن كل تطبيق مستمر من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  الى  $(Y, \sigma)$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح. البرهان. ليكن  $V \in \sigma$  و  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيقاً مستمراً من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  إلى  $(Y, \sigma)$  وعليه فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة مفتوحة في  $X$ ، باستخدام مبرهنة (4-2-2) فإن  $f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  في  $X$  وعليه فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$ .

### مثال (28-2-2)

انظر إلى المخطط الآتي:



$$\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{d\}, \{a, c, d\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, Y, \{4\}, \{3, 4\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{d\}\}$$

$$f^{-1}(\{4\}) = \{d\} \in \tau, f^{-1}(\{3, 4\}) = \{c, d\} \notin \tau$$

وبذلك فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  ليس تطبيقاً مستمراً ولكن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$ -مستمر من النمط -  $ic$  لأن  $f^{-1}(\{3, 4\}) = \{c, d\}$  مجموعة  $\mathfrak{T}$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  وكما يأتي:

$$cl^*({b, d} \cap {c, d}) = cl^*({d}) = {d} \subseteq int({c, d}) = {d}$$

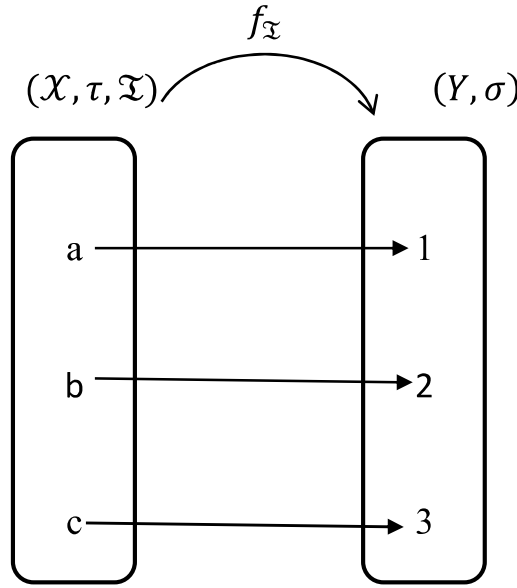
### مبرهنة (29-2-2)

ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا مثاليًا و  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجيًا ، فإن كل تطبيق مستمر من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  الى  $(Y, \sigma)$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $iC$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $V \in \sigma$  و  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيقاً مستمراً من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  إلى  $(Y, \sigma)$  وعليه فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة مفتوحة في  $X$ , باستخدام مبرهنة (4-2-2) فإن  $f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $iC$  في  $X$  وحسب مبرهنة (15-2-2) فإن  $f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $iC$  الضعيفة في  $X$  وعليه فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $iC$  الضعيفة.

### مثال (30-2-2)

ينظر الى المخطط الآتي:



$$\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, Y, \{2, 3\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{c\}\}$$

$$f^{-1}(\{2, 3\}) = \{b, c\} \notin \tau$$

لاحظ أن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق غير مستمر ولكن

$$cl^*(cl(\{b\} \cap \{b, c\})) = cl^*(cl(\{b\})) = cl^*(\{b\}) = \{b\} \subseteq int(A) = \{b\}$$

وعليه فإن  $f^{-1}(\{2,3\}) = \{b,c\}$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة وبذلك فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  الضعيفة.

### مبرهنة (31-2-2)

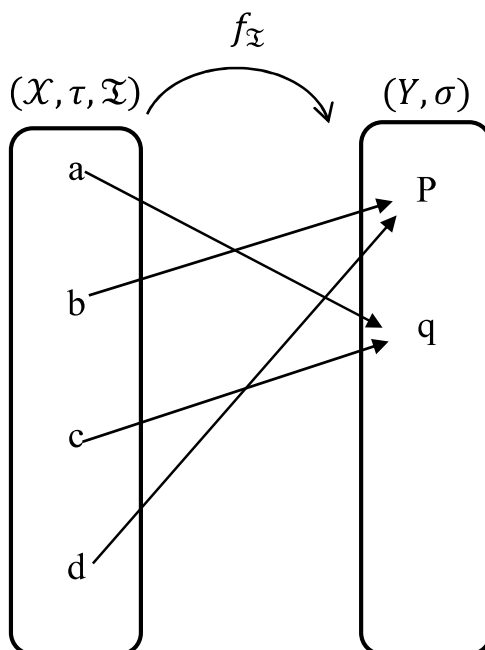
ليكن  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا مثاليًا و  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجيًا . فإن كل تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  الى  $(Y, \sigma)$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  الضعيفة.

البرهان. ليكن  $V \in \sigma$  و  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيقاً  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  من  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  إلى  $(Y, \sigma)$  وعليه فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  في  $X$ , وحسب مبرهنة (15-2-2) فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\mathfrak{T}$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ، لذلك فإن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$  الضعيفة .

### ملاحظة (32-2-2)

لا توجد علاقة بين التطبيق  $\mathfrak{T}$  - المستمر من النمط -  $\alpha$  والتطبيق  $\mathfrak{T}$  - شبه المستمر من الفضاء التبولوجي المثالي  $(X, \tau, \mathfrak{T})$  الى الفضاء التبولوجي  $(Y, \sigma)$  مع التطبيق  $\mathfrak{T}$  - المستمر من النمط -  $ic$  والتطبيق  $\mathfrak{T}$  - المستمر من النمط -  $icc$  .

### مثال (33-2-2)



$$1) \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, Y, \{q\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$$

$$f^{-1}(\{q\}) = \{a, c\} \notin \tau$$

نلاحظ أن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$ -مستمر من النمط -  $\alpha$ ، لأن

$$f^{-1}(\{q\}) = \{a, c\} \subset \text{int}(cl^*(\text{int}(\{a, c\}))) = \mathcal{X}$$

وايضاً تطبيق  $\mathfrak{T}$  - شبه مستمر، لأن

$$f^{-1}(\{q\}) = \{a, c\} \subset cl^*(\text{int}(\{a, c\})) = \mathcal{X}$$

ولكن  $f_{\mathfrak{T}}$  ليس تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$

$$cl^*(\{b, c, d\} \cap \{a, c\}) = cl^*(\{c\}) = \{c, d\} \not\subseteq \text{int}(\{a, c\}) = \{a\}$$

وكذلك ليس تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $icc$ .

$$2)\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, Y, \{p\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$$

$$f^{-1}(\{p\}) = \{b, d\} \notin \tau$$

نلاحظ أن  $f_{\mathfrak{T}}$  تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمر من النمط -  $ic$ ، لأن

$$cl^*(\{b, c\} \cap \{b, d\}) = cl^*(\{b\}) = \{b\} \subseteq \text{int}(\{b, d\}) = \{b\}$$

وبما أن  $\text{int}(\{b, d\}) = \{b\}$  فنحصل على أنه  $f_{\mathfrak{T}}$  ايضاً تطبيق  $\mathfrak{T}$  - مستمرة من النمط -  $icc$ .

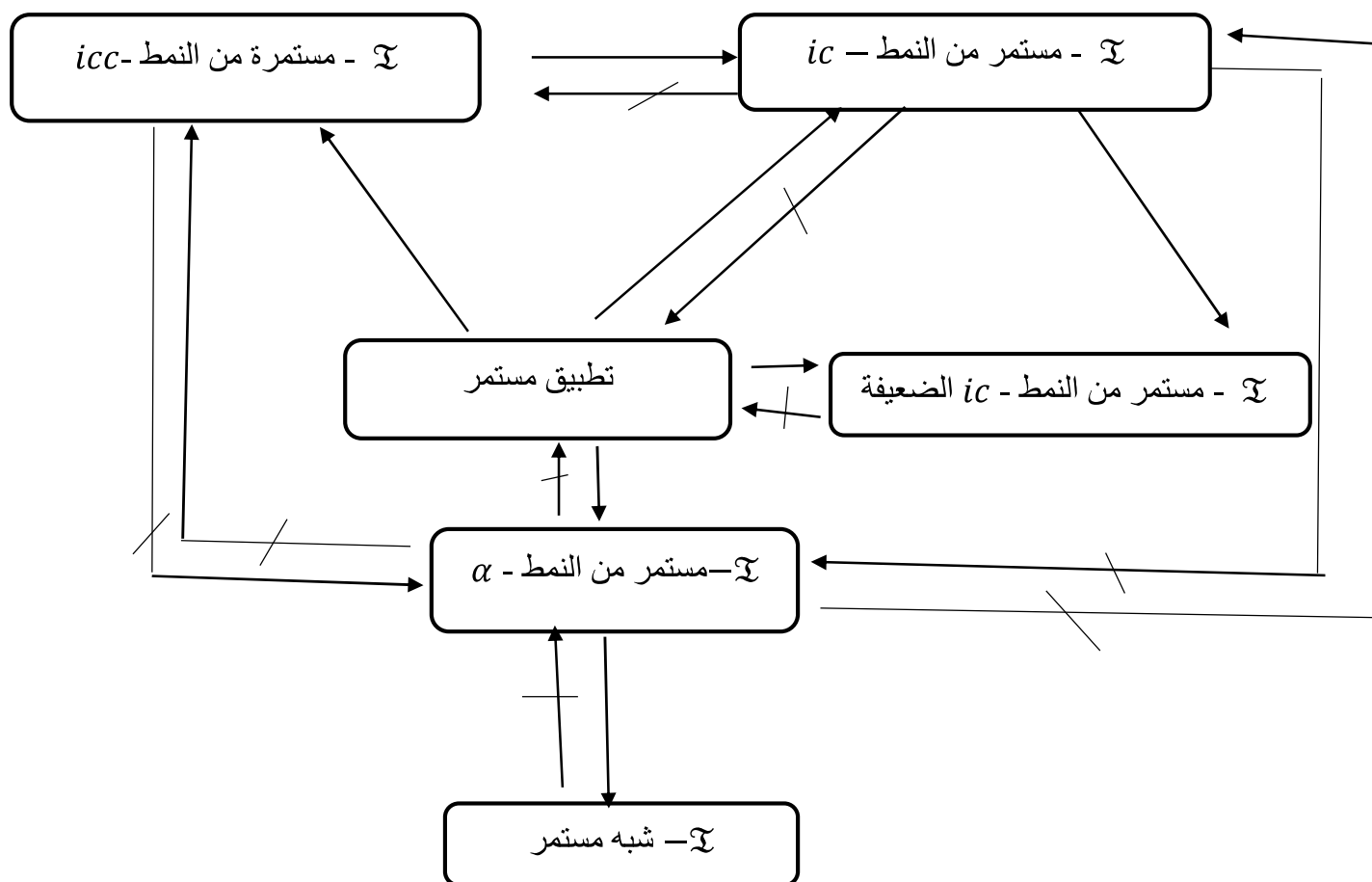
ولكن  $f_{\mathfrak{T}}$  ليس تطبيق  $\mathfrak{T}$ -مستمر من النمط -  $\alpha$  لأن

$$f^{-1}(\{p\}) = \{b, d\} \not\subseteq \text{int}(cl^*(\text{int}(\{b, d\}))) = \{b\}$$

وليس تطبيق  $\mathfrak{T}$  - شبه مستمر لأن

$$f^{-1}(\{p\}) = \{b, d\} \not\subseteq cl^*(\text{int}(\{b, d\})) = \{b\}$$

وفيما يأتي يمكن توضيح العلاقة بين استمرارية المجموعات المفتوحة أعلاه كما في المخطط



### المخطط (2-2-2)

# الفصل الثالث

بعض التطبيقات في الفضاءات التبادلية  
المعممة المثالية

### (1-3) المقدمة

سنكمل في هذا الفصل ما قدمناه في الفصل الثاني وهو تقديم أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة وهي:  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  و  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  في الفضاء التوبولوجي المعمم والفضاء التوبولوجي المعمم المثالي على التوالي. ايجاد العلاقة بين هذه الأنماط مع خصائصها، فضلاً عن ذلك، قمنا بدراسة استمرارية التطبيقات في الفضاء المعمم المثالي فقط باستخدام هذه الأنماط المفتوحة الجديدة. أخيراً، ذكرنا وناقشنا البديهيات  $\psi T_{0ic}$  و  $\psi T_{1ic}$ ، اعتماداً على هذه الأنماط المفتوحة الجديدة.

### (2-3) تعاريف ومبرهنات وأمثلة توضيحية في الفضاء التوبولوجي المعمم.

#### تعريف (1-2-3)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  إذا وجدت  $F \in \psi^c \setminus \{\emptyset, M\}$  بحيث إن  $F \cap A \subseteq \text{int}_\psi(A)$ . متممة المجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  هي مجموعة  $\psi$  - مغلقة من النمط -  $ic$ .

#### تعريف (2-2-3)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  إذا كانت  $A$  مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\text{int}_\psi(A) = G$  حيث أن  $G \in \psi \setminus \{\emptyset\}$ . متممة المجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  هي مجموعة  $\psi$  - مغلقة من النمط -  $icc$ .

#### مثال (3-2-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$ ،  $\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$  وليكن  $A = \{a, b\}$  فإن المجموعة  $A$

1 -  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$ ، لأن

$$F \cap A = \{a, d\} \cap \{a, b\} = \{a\} \subseteq \text{int}_\psi(\{a, b\}) = \{a\}$$

2 -  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$ ، لأن  $A$   $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  وكذلك

$$\text{int}_\psi(\{a, b\}) = \{a\}$$

### مبرهنة (4-2-3)

كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  هي  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $(M, \psi)$  فضاءً توبولوجي معمم. وليكن  $G \subseteq M$  مجموعة  $\psi$ -مفتوحة وبهذا فإن  $G = int_{\psi}(G)$  لكن  $F \cap G \subseteq G$  لأي مجموعة مغلقة  $F \setminus \{\emptyset, M\}$  وبذلك

$$F \cap G \subseteq G = int_{\psi}(G)$$

ومنها نحصل على أن  $G$  مجموعة  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

### مبرهنة (5-2-3)

كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  هي  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $icc$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $G$  مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  ومن المبرهنة (4-2-3) تكون  $G$  مجموعة  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  وبما أن  $int_{\psi}(G) = G$  لذلك فإن  $G$  مجموعة  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ .

### مثال (6-2-3)

ليكن  $M = \{a, b, c\}$  ,  $\psi = \{\emptyset, \{a\}\}$  وليكن  $A = \{a\}$  وعليه فإن  $A = \{a\}$  تكون  $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$ ، وذلك لأن

$$F \cap A = \{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset \subseteq int_{\psi}(\{a\}) = \{a\}$$

وأيضا  $A = \{a\}$   $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $icc$ ، لأن  $A$   $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  وكذلك  $int_{\psi}(\{a\}) = \{a\}$ .

### مثال (7-2-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$  ,  $\psi = \{\emptyset, \{d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$  وليكن  $A = \{d, c\}$  وعليه فإن  $A = \{d, c\}$   $\psi$ -مفتوحة من النمط -  $ic$  ، وذلك لأن

$$F \cap A = \{a, d\} \cap \{d, c\} = \{d\} \subseteq int_{\psi}(\{d, c\}) = \{d\}$$

وبما أن  $int_{\psi}(\{d, c\}) = \{d\}$  فإن  $A - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  ولكن ليست  $\psi$  - مفتوحة ، لأن  $\{d, c\} \notin \psi$  .

### ملاحظة (8-2-3)

لا توجد علاقة بين المجموعات  $\psi$  - المفتوحة من النمط -  $\alpha$  و  $\psi$  - شبه المفتوحة مع المجموعات  $\psi$  - المفتوحة من النمط -  $ic$  والمجموعات  $\psi$  - المفتوحة من النمط -  $icc$  .

### مثال (9-2-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$  , عندئذ نحصل على أنه:

(1) إذا كانت  $A = \{b, c\}$  ,  $\psi = \{\emptyset, M, \{c\}, \{a, c\}\}$  فإن المجموعة  $A$

(a) ليست  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  ، لأن

$$F \cap A = \{b, d\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin int_{\psi}(\{b, c\}) = \{c\}$$

وكذلك ليست  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  ، لأن  $A$  ليست  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  .

(b)  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$  ، لأن

$$int_{\psi}(\{b, c\}) = \{c\}, cl_{\psi}(\{c\}) = M, int(\{M\}) = M$$

$$A = \{b, c\} \subset int_{\psi}(cl_{\psi}(int_{\psi}(\{b, c\}))) = M$$

(c)  $\psi$  - شبه المفتوحة ، لأن

$$A = \{b, c\} \subset cl_{\psi}(int_{\psi}(\{b, c\})) = M$$

(2) إذا كانت  $A = \{b, d\}$  ,  $\psi = \{\emptyset, \{d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$  فإن المجموعة  $A$

(a)  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  ، لأن

$$F \cap A = \{a, d\} \cap \{b, d\} = \{d\} \subseteq int_{\psi}(\{b, d\}) = \{d\}$$

(b)  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $icc$  ، لأن  $A$  مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $int_{\psi}(\{b, d\}) = \{d\}$  .

(c) ليست مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $\alpha$  ، لأن

$$int_{\psi}(\{b, d\}) = \{d\}, cl_{\psi}(\{d\}) = \{a, d\}, int_{\psi}(\{a, d\}) = \{d\}$$

$$A = \{b, d\} \not\subset int_{\psi}(cl_{\psi}(int_{\psi}(\{b, d\}))) = \{d\}$$

(d) ليست مجموعة  $\neg\psi$  - شبه المفتوحة، لأنَّ

$$A = \{b, d\} \notin cl_\psi(int_\psi(\{b, d\})) = \{a, d\}$$

### مبرهنة (10-2-3)

كل مجموعة  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  في  $(M, \psi)$  تكون  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $A \subset M$  مجموعة  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  ومن التعريف (2-2-3) نحصل على أنه  $A$  مجموعة  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $ic$ .

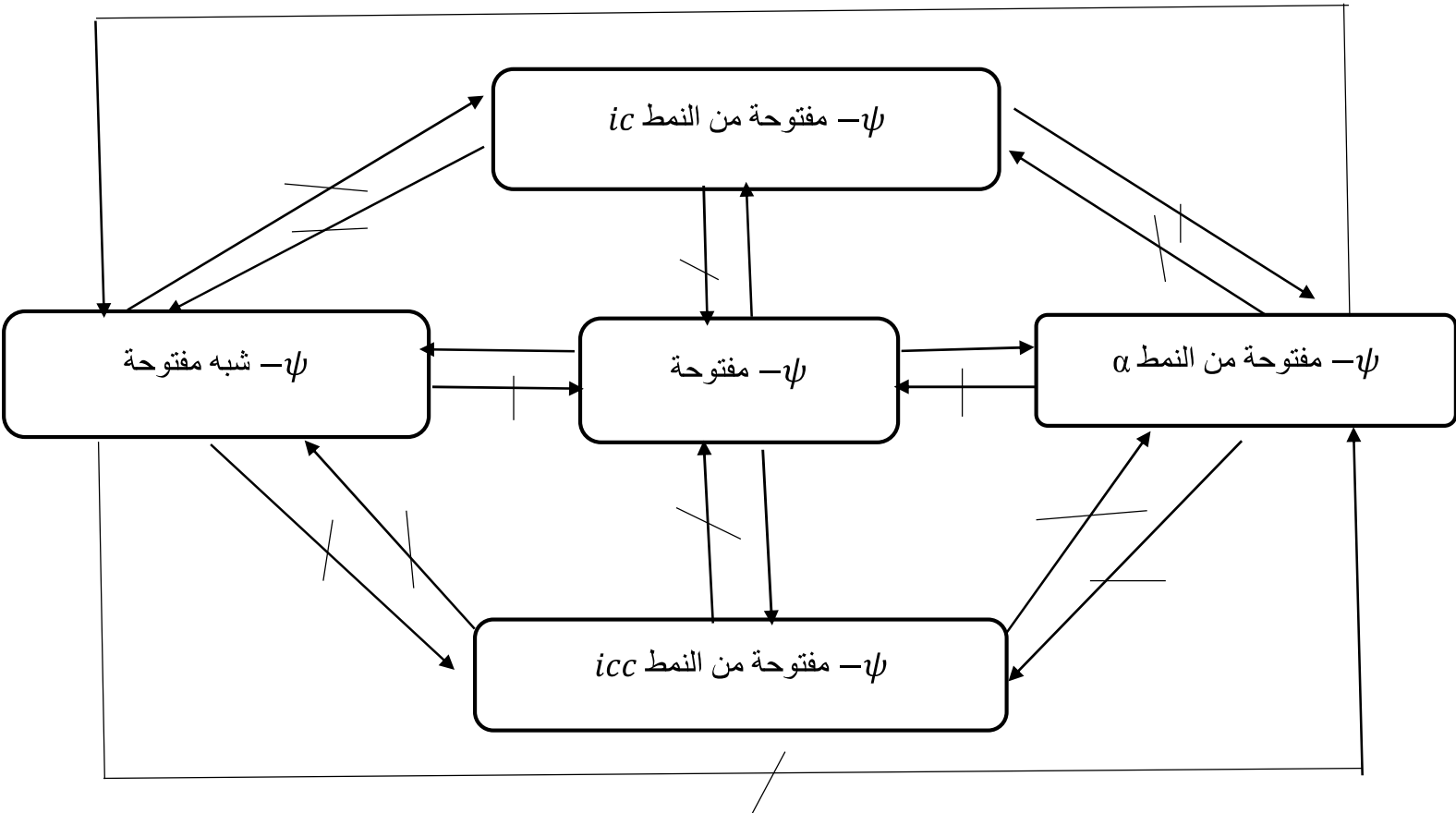
### مثال (11-2-3)

ليكن  $M = \{a, b, c\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, \{b, c\}\}$ , وليكن  $A = \{b\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $ic$  لأن

$$F \cap A = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \subseteq int_\psi(\{b\}) = \emptyset$$

ولكن ليست  $\neg\psi$  -مفتوحة من النمط -  $icc$  لأن  $int_\psi(\{b\}) = \emptyset$

يمكن توضيح العلاقة بين المجموعات المفتوحة اعلاه بالمخطط الآتي:



المخطط (1-2-3)

(3-3) بديهيات الفصل للأنماط  $\psi$  - المفتوحة من النمط -  $ic$  في الفضاء التبولوجي المعمم.

### تعريف (1-3-3)

الفضاء التبولوجي المعمم  $(M, \psi)$  يسمى  $\psi T_{0ic}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $p, q$  في  $M$  يوجد مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  تحوي إحداها ولا تحوي على الأخرى.

### ملاحظة (2-3-3)

كل  $T_{0ic}$  هو  $\psi T_{0ic}$ ، لأن كل مجموعة مفتوحة من النمط -  $ic$  هي  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$ .

### تعريف (3-3-3)

الفضاء التبولوجي المعمم  $(M, \psi)$  يسمى  $\psi T_{1ic}$  إذا وفقط إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة  $p, q$  في  $M$  يوجد زوج من المجموعات  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  إحداها تحوي  $p$  ولا تحوي على  $q$  والأخرى تحوي  $q$  ولا تحوي  $p$ .

### ملاحظة (4-3-3)

كل  $T_{1ic}$  هو  $\psi T_{1ic}$ ، لأن كل مجموعة مفتوحة من النمط -  $ic$  هي  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$ .

### مثال (5-3-3)

ليكن  $M = \{x, y\}$ ،  $\psi = \{\emptyset, M, \{x\}, \{y\}\}$  وعليه فإن عائلة المجموعات الجزئية من  $M$  تكون  $\psi T_{0ic}$  و  $\psi T_{1ic}$ .

### مبرهنة (6-3-3)

ليكن  $(M, \psi)$  فضاءً تبولوجيًا معممًا فإن كل  $\psi T_{1ic}$  هو  $\psi T_{0ic}$ .

البرهان. ليكن  $(M, \psi)$  فضاء  $\psi T_{1ic}$  وعليه يوجد  $G_1, G_2$  مجموعتان  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  إذ إن  $\forall p, q \in M$  حيث  $(p \neq q)$  فإن  $p \in G_1, q \notin G_1, q \in G_2, p \notin G_2$  وعليه فإن  $(M, \psi)$  فضاء  $\psi T_{0ic}$ .

### ملاحظة (7-3-3)

ليكن  $(M, \psi)$  فضاءاً تبولوجياً معممًا فإن كل فضاء  $\psi T_{1s}$  لا يكون فضاء  $\psi T_{1ic}$  والعكس صحيح.

### مثال (8-3-3)

ليكن  $\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,  $M = \{a, b, c\}$

$-\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$  شبه مفتوحة

$-\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  مفتوحة من النمط -  $ic$

من الواضح أن  $(M, \psi)$  هو فضاء  $\psi T_{1s}$ ، لأنَّه يوجد  $\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$  شبه مفتوحة

$$a \neq b \Rightarrow a \in \{a\}, b \notin \{a\}, b \in \{b\}, a \notin \{b\}$$

$$a \neq c \Rightarrow a \in \{a\}, c \notin \{a\}, c \in \{b, c\}, a \notin \{b, c\}$$

$$b \neq c \Rightarrow b \in \{b\}, c \notin \{b\}, c \in \{a, c\}, b \notin \{a, c\}$$

ولكن  $(M, \psi)$  ليس فضاء  $\psi T_{1ic}$ ، لأنَّ  $a \neq c$  ولا توجد مجموعة  $-\psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  تحوي  $c$  ولا تحوي  $a$ .

### مثال (9-3-3)

ليكن  $\psi = \{\emptyset, M, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ,  $M = \{a, b, c\}$

$-\psi = \{\emptyset, M, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  شبه مفتوحة

$-\psi = \{\emptyset, M, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  مفتوحة من النمط -  $ic$

من الواضح أن  $(M, \psi)$  هو فضاء  $\psi T_{1ic}$ ، لأنَّ يوجد  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$  تكون  $-\psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$ .

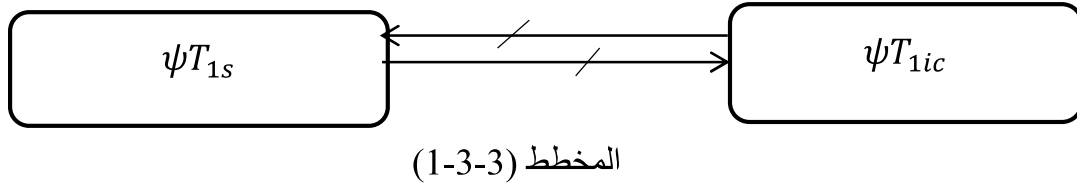
$$a \neq b \Rightarrow a \in \{a\}, b \notin \{a\}, b \in \{b\}, a \notin \{b\}$$

$$a \neq c \Rightarrow a \in \{a\}, c \notin \{a\}, c \in \{c\}, a \notin \{c\}$$

$$b \neq c \Rightarrow b \in \{b\}, c \notin \{b\}, c \in \{c\}, b \notin \{c\}$$

ولكنه ليس فضاء  $\psi T_{1s}$ ، لأن  $a \neq b$  ولا توجد مجموعة  $\psi$  - شبه مفتوحة تحوي  $b$  ولا تحوي  $a$ .

يمكن توضيح العلاقة بين الفضاءات أعلاه كما في المخطط الآتي:



### مبرهنة (10-3-3)

ليكن  $(M, \psi)$  فضاءً تبولوجيًا معممًا فإن كل فضاء  $\psi T_1$  هو فضاء  $\psi T_{1ic}$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $(M, \psi)$  فضاء  $\psi T_1$  وعليه يوجد  $G_1, G_2 \in \psi$  إذ إن  $\forall p, q \in M$ ،  $(p \neq q)$  فإن  $p \in G_1, q \notin G_1, q \in G_2, p \notin G_2$  وعندما كل مجموعة  $\psi$  - مفتوحة تكون مجموعة  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  ومنها نحصل على أن  $G_1, G_2$  تكون  $\psi$  - مفتوحة من النمط -  $ic$  وبذلك يكون  $(M, \psi)$  فضاء  $\psi T_{1ic}$ .

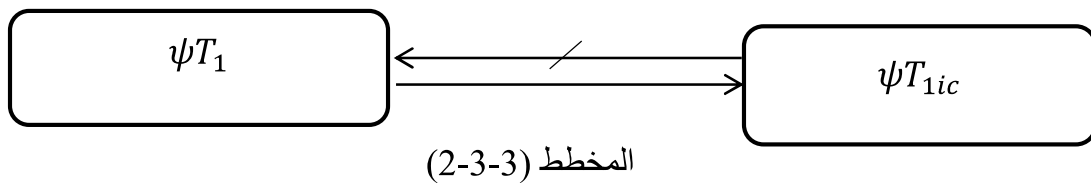
### مثال (11-3-3)

$$\psi = \{\emptyset, M, \{a, c\}, \{b, c\}\}, M = \{a, b, c\}$$

$$\psi = \{\emptyset, M, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \text{ - مفتوحة من النمط - } ic$$

نلاحظ أن  $(M, \psi)$  هو فضاء  $\psi T_{1ic}$  ولكنه ليس فضاء  $\psi T_1$  لأن  $a \neq c$  وعليه لا توجد مجموعة  $\psi$  - مفتوحة تحوي  $a$  ولا تحوي  $c$ .

يمكن توضيح العلاقة بين الفضاءات أعلاه كما في المخطط الآتي:



### (4-3) بعض الأنماط من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي.

في هذه الفقرة ندرس أصنافاً من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  هي المجموعات  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$ , وكذلك نقارن هذه الأصناف مع أصناف أخرى مثل  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $\alpha$  و  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مفتوحة فضلاً عن ذلك نقوم بدراسة خواص هذه الأصناف مثل الاستمرارية والاستمرارية الضعيفة.

#### تعريف (1-4-3)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  إذا وجدت  $F \in \psi^c \setminus \{\emptyset, M\}$  بحيث إنَّ  $cl^*\psi(F \cap A) \subseteq int_\psi(A)$ . متممة المجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  هي مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مغلقة من النمط -  $ic$ .

#### تعريف (2-4-3)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية تسمى  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  إذا كانت  $A$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $int_\psi(A) = G$  إذ إنَّ  $G \in \psi \setminus \{\emptyset\}$ .

#### مثال (3-4-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{d\}\}$ ,  $A = \{a, c\}$  فإنَّ  $A$  تكون

1- مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$

$$cl^*\psi(F \cap A) = cl^*\psi(\{a, d\} \cap \{a, c\}) = cl^*\psi(\{a\}) = \{a\} \cup \{a\}^*\psi = \{a\}$$

$$\Rightarrow cl^*\psi(F \cap A) = \{a\} \subseteq int_\psi(\{a, c\}) = \{a\}$$

2- مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$ , لأنَّ  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  وكذلك  $int_\psi(\{a, c\}) = \{a\}$ .

الآن نبين كيفية إيجاد  $\{a\}^*\psi$

$$\{a\} \cap \{a\} = \{a\} \notin \mathfrak{T}, \{a, b, c\} \cap \{a\} = \{a\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow a \in \{a\}^*\psi$$

$$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow b, c \notin \{a\}^*\psi$$

لا توجد  $\psi$ -مفتوحة تحتوي على  $d$  و  $d \notin \{a\}^{*\psi}$

### نتيجة (4-4-3)

كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  هي  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. يمكن اثباتها مباشرةً.

### مثال (5-4-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, \{d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$   
 $A = \{c, d\}$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  لأن

$$cl^{*\psi}(\{a, d\} \cap \{c, d\}) = cl^{*\psi}(\{d\}) = \{d\} \subseteq int_{\psi}(\{c, d\}) = \{d\}$$

ولكن  $A = \{c, d\}$  ليست مجموعة  $\psi$ -مفتوحة.

### مبرهنة (6-4-3)

أي مجموعة محتواه في مجموعة  $\psi$ -مغلقة في الفضاء التولوجي المعمم المثالي  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  تكون  $\mathfrak{T} - \psi$  مغلقة من النمط -  $ic$ .

البرهان. ليكن  $A \subset F \in \psi^c$

$$\Rightarrow (F \cap A) = A$$

$$\Rightarrow cl^{*\psi}(F \cap A) = cl^{*\psi}(A) = A \cup A^{*\psi}$$

بما أن  $int_{\psi}(A) \subseteq A \subseteq cl^{*\psi}(F \cap A)$  ومنها نحصل على أنه

$$int_{\psi}(A) \subseteq cl^{*\psi}(F \cap A)$$

لذلك فإن المجموعة  $A$  تكون  $\mathfrak{T} - \psi$  مغلقة من النمط -  $ic$ .

### نتيجة (7-4-3)

كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  هي  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. يمكن اثباتها مباشرةً.

لأثبات العكس ينظر إلى المثال (3-4-5).

### ملاحظة (3-4-8)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معممًا مثاليًا فإنه لا توجد علاقة بين المجموعات  $\psi - \mathfrak{T}$  المفتوحة من النمط  $\alpha$  والمجموعات  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه المفتوحة مع المجموعات  $\psi - \mathfrak{T}$  المفتوحة من النمط  $icc$  و  $ic$  و  $\psi - \mathfrak{T}$  المفتوحة من النمط  $icc$ .

### مثال (3-4-9)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$ , عندئذ نحصل على أنه:

(1) إذا كانت  $A = \{b, d\}$  و  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون

(a) مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط  $ic$

$$cl^*\psi(F \cap A) = cl^*\psi(\{c\} \cap \{b, d\}) = \emptyset \subseteq int(\{b, d\}) = \{b\}$$

(b) مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط  $icc$ ، لأن  $A \cap \mathfrak{T} = \{b\}$  مفتوحة من النمط  $ic$  وكذلك  $int_\psi(\{b, d\}) = \{b\}$

(c) ليست مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط  $\alpha$ ، لأن

$$A = \{b, d\} \notin int_\psi(cl^*\psi(int_\psi(\{b, d\}))) = \{b\}$$

(d) ليست مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مفتوحة لأن

$$A = \{b, d\} \notin cl^*\psi(int_\psi(\{b, d\})) = \{b, c\}$$

كيفية إيجاد  $\{b\}^*\psi$

$$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow a \notin \{b\}^*\psi, \{b\} \cap \{b\} = \{b\} \in \mathfrak{T} \Rightarrow b \notin \{b\}^*\psi$$

بما أنه لا توجد مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة تحوي  $c$  فإن  $c \in \{b\}^*\psi$

$$\{a, b, d\} \cap \{b\} = \{b\} \in \mathfrak{T} \Rightarrow d \notin \{b\}^*\psi$$

$$\therefore \{b\}^*\psi = \{c\}$$

(2) إذا كانت  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, M, \{b\}\}$  وليكن  $A = \{a, b\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون

(a) مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $\alpha$ . لأن

$$A = \{a, b\} \subset \text{int}_{\psi}(cl^{*\psi}(\text{int}_{\psi}(\{a, b\}))) = M$$

$$\text{int}_{\psi}(\{a, b\}) = \{b\}$$

$$cl^{*\psi}(\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}^{*\psi} = M$$

(b) مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مفتوحة، لأن

$$A = \{a, b\} \subset cl^{*\psi}(\text{int}_{\psi}(\{a, b\})) = M$$

(c) ليست مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$

$$cl^{*\psi}(F \cap A) = cl^{*\psi}(\{a, c, d\} \cap \{a, b\}) = cl^{*\psi}(\{a\}) = \{a\} \cup \{a\}^{*\psi} = \{a\}$$

$$\Rightarrow cl^{*\psi}(F \cap A) = \{a\} \not\subseteq \text{int}_{\psi}(\{a, b\}) = \{b\}$$

(d) ليست مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  لأن  $A$  ليست  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$ .

الآن ندرس خواص المجموعات  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  و  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  وعلاقة هذه الأنماط مع المجموعات  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه المفتوحة الضعيفة.

**تعريف (10-4-3)** (Mohammed, Mohammed, 2023)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ يقال إن  $A$  هي  $\psi - \mathfrak{T}$  شبه مفتوحة ضعيفة إذا كان  $A \subset cl^{*\psi}(\text{int}_{\psi}(cl_{\psi}(A)))$ .

**تعريف (11-4-3)**

ليكن  $A \subset M$  مجموعة غير خالية تسمى  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة إذا وجدت  $F \in \psi^c \setminus \{\emptyset, M\}$  بحيث إن  $F \subseteq \text{int}_{\psi}(A)$  و  $cl^{*\psi}(cl_{\psi}(F \cap A)) \subseteq \text{int}_{\psi}(A)$ . متممة المجموعة

$\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة هي مجموعة  $\mathcal{T} - \psi$  مغلقة من النمط -  $ic$  الضعيفة

### تعريف (12-4-3)

ليكن  $A \subset M$  مجموعة جزئية غير خالية عندئذ  $A$  هي  $\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة إذا كانت  $A$  مجموعة  $\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة و  $int_{\psi}(A) = G$  إذ  $G \in \psi \setminus \{\emptyset, M\}$ .

### ملاحظة (13-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathcal{T})$  فضاءً تبولوجيًا معمماً مثاليًا فإنه لا توجد علاقة بين المجموعات  $\mathcal{T} - \psi$  شبه المفتوحة الضعيفة مع المجموعات  $\mathcal{T} - \psi$  المفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة و  $\mathcal{T} - \psi$  المفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة.

### مثال (14-4-3)

ليكن  $M = \{a, b, c, d\}$  عندئذ نحصل على أنه

(1) إذا كانت  $\psi = \{\emptyset, \{c\}\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{c\}\}$  وليكن  $A = \{b, c\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون (a) مجموعة  $\mathcal{T} - \psi$  شبه مفتوحة الضعيفة، لأن

$$A = \{b, c\} \subset cl^{\psi} \left( int_{\psi} \left( cl_{\psi}(\{b, c\}) \right) \right) = M$$

$$cl_{\psi}(\{b, c\}) = M, int_{\psi}(M) = \{c\}, cl^{\psi}(\{c\}) = M$$

(b) ليست مجموعة  $\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة، لأن

$$cl_{\psi}(\{a, b, d\} \cap \{b, c\}) = cl_{\psi}(\{b\}) = \{a, b, d\}$$

$$cl^{\psi}(\{a, b, d\}) = \{a, b, d\} \cup \{a, b, d\}^{\psi} = \{a, b, d\} \not\subseteq int_{\psi}(\{b, c\}) = \{c\}$$

(c) ليست مجموعة  $\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة، لأن  $A$  ليست  $\mathcal{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

(2) إذا كانت  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{d\}\}$  ,  $\psi = \{\emptyset, M, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$  وليكن  $A = \{a, b\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون

(a)  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة ، لأن

$$cl_{\psi}(\{b\} \cap \{a, b\}) = cl_{\psi}(\{b\}) = \{b\}$$

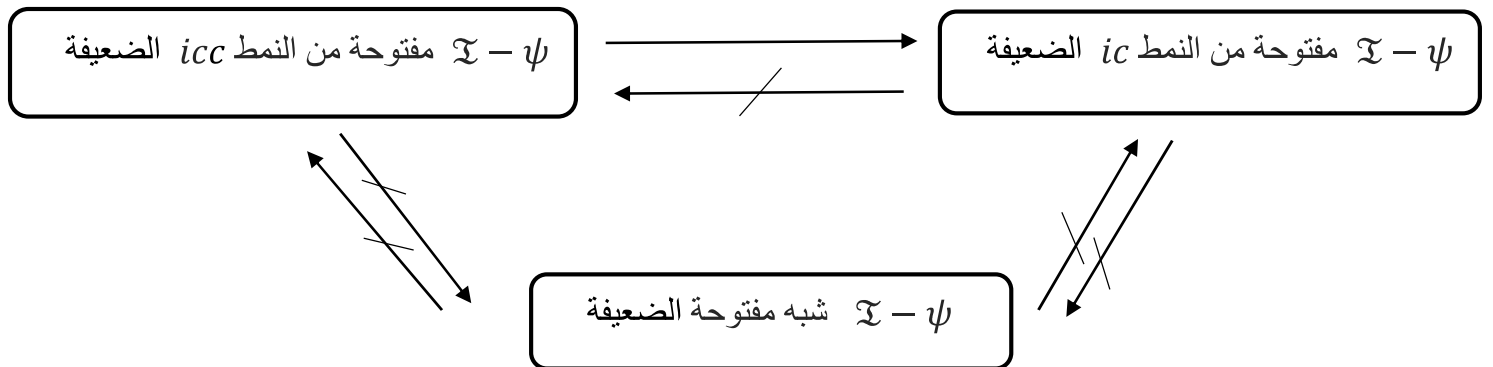
$$cl^{*\psi}(\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}^{*\psi} = \{b\} \subseteq int_{\psi}(\{a, b\}) = \{b\}$$

(b)  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة ، لأن  $A$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة وكذلك  $int_{\psi}(\{a, b\}) = \{b\}$ .

(c) ليست  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مفتوحة الضعيفة ، لأن

$$A = \{a, b\} \not\subseteq cl^{*\psi}(int_{\psi}(cl_{\psi}(A))) = \{b\}$$

يمكن توضيح العلاقة أعلاه عن طريق المخطط الآتي:



المخطط (1-4-3)

### مبرهنة (15-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معممًا مثاليًا فإن كل مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  تكون  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

البرهان. ليكن  $A \subset M$  هي مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  فإن  $A^c$  هي مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مغلقة من النمط -  $ic$  هذا يعني أنه توجد مجموعة مغلقة  $F \setminus \{\emptyset, M\}$  أي إن

$$int_{\psi}(A^c) \subseteq cl^{*\psi}(F \cap A^c) \subseteq cl^{*\psi}(cl_{\psi}(F \cap A^c))$$

وبذلك نحصل على أن  $A^c$  هي مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مغلقة من النمط -  $ic$  الضعيفة ومن ثم فإن  $A$  تكون  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة.

### مبرهنة (16-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معممًا مثاليًا فإن كل مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  تكون  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة .

البرهان. ليكن  $A \subset M$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  فإن  $A$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  وحسب مبرهنة (15-4-3) نحصل على أن  $A$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة وبما أن  $int(A) = G \setminus \{\emptyset, M\}$  وعليه فإن  $A$  هي مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة .

### مبرهنة (17-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءاً تبولوجياً معممًا مثاليًا فإن كل مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة تكون  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة لكن العكس غير صحيح.

البرهان. نحصل على البرهان من تعريف (12-4-3) .

### مثال (18-4-3)

ليكن  $M = \{a, b, c\}$ ,  $\psi = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$ ,  $A = \{b\}$  فإن المجموعة  $A$  تكون  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيفة لأن

$$cl^{*\psi}(cl(\{b\} \cap \{c\})) = cl^{*\psi}(\emptyset) = \emptyset \subseteq int_{\psi}(\{b\}) = \emptyset$$

ولكن ليست  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة لأن  $int_{\psi}(\{b\}) = \emptyset$ .

### نتيجة (19-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا معممًا مثاليًا فإن كل مجموعة  $\psi$ -مفتوحة تكون  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة ولكن العكس غير صحيح.

البرهان. نحصل على البرهان من النتيجة (7-4-3) والمبرهنة (16-4-3).

### مثال (20-4-3)

$$A = \{c, d\}, \mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}, \psi = \{\emptyset, M, \{a, b, d\}, \{c\}\}, M = \{a, b, c, d\}$$

فإن المجموعة  $A$  تكون مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيفة ، لأن

$$cl^{\psi} (cl_{\psi} (\{c\} \cap \{c, d\})) = cl^{\psi} (\{c\}) = \{c\} \subseteq int(\{c\}) = \{c\}$$

وكذلك  $int(\{c, d\}) = \{c\}$  ولكن المجموعة  $A$  ليست  $\psi$ -مفتوحة، لأن  $A = \{c, d\} \notin \psi$

الاستمرارية والاستمرارية الضعيفة لأنماط من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي.

### تعريف (21-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا معممًا مثاليًا وليكن  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجيًا معممًا

التطبيق  $f_{\psi}: (M, \psi, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  يسمى

1- تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $ic$  إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  في  $M$  ، لكل  $V \in \sigma$ .

2- تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $icc$  إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  في  $M$  ، لكل  $V \in \sigma$ .

### مبرهنة (22-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجيًا معممًا مثاليًا وليكن  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجيًا معممًا فإن

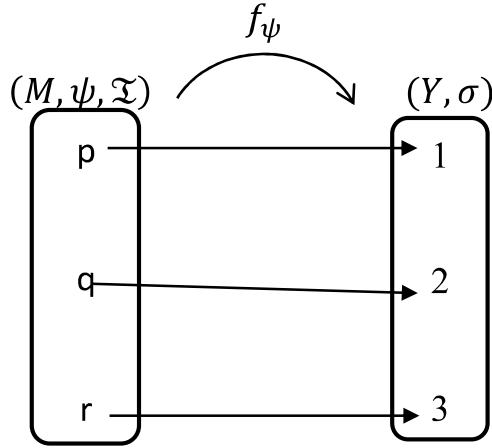
كل تطبيق مستمر من  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  الى  $(Y, \sigma)$  هو تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $ic$  والعكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $f_{\psi}: (M, \psi, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  تطبيق مستمر وليكن  $V \in \sigma$  وعليه فإن

$f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  وحسب نتيجة (4-4-3) فإن  $f^{-1}(V)$  تكون

$\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $ic$  وبذلك فإن  $f_{\psi}$  تكون تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمرة من النمط -  $ic$ .

مثال (23-4-3)



$$\psi = \{\emptyset, \{p, q\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{p\} \notin \psi$$

وبذلك فإن  $f_\psi$  لا يكون تطبيق مستمر ولكن  $f_\psi$  تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $ic$ ، لأنَّ

$$f^{-1}(\{1\}) \text{ مجموعة } \psi - \mathfrak{T} \text{ مفتوحة من النمط - } ic$$

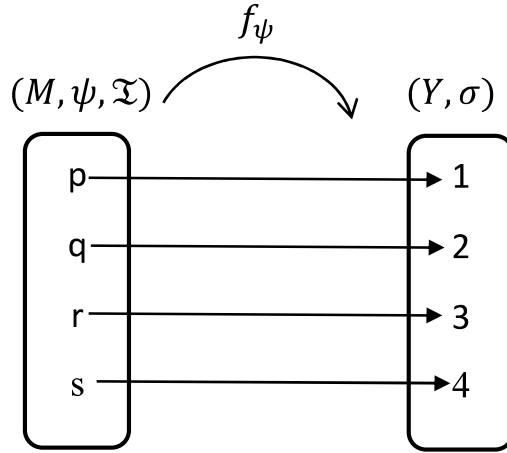
$$cl^{*\psi}(\{r\} \cap \{p\}) = cl^{*\psi}(\emptyset) = \emptyset \subseteq int_\psi(\{p\}) = \emptyset$$

مبرهنة (24-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً توبولوجيًا معممًا مثاليًا وليكن  $(Y, \sigma)$  فضاءً توبولوجيًا معممًا فإن كل تطبيق مستمر من  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  إلى  $(Y, \sigma)$  هو تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $icc$  والعكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $f_\psi: (M, \psi, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  تطبيق مستمر وليكن  $V \in \sigma$  وعليه فإنَّ  $f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  وحسب نتيجة (7-4-3) فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\psi - \mathfrak{T}$  مفتوحة من النمط -  $icc$  وبذلك فإن  $f_\psi$  يكون تطبيق  $\psi - \mathfrak{T}$  مستمر من النمط -  $icc$ .

مثال (25-4-3)



$$\psi = \{\emptyset, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}\}$$

$$\Xi = \{\emptyset, \{q\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{1, 4\}\}$$

$$f^{-1}(\{1, 4\}) = \{p, s\} \notin \psi$$

وبذلك فإن  $f_\psi$  لا تكون تطبيق مستمر ولكن  $f_\psi$  تطبيق  $\psi - \Xi$  مستمرة من النمط -  $icc$ ، لأنَّ  
 $f^{-1}(\{1, 4\})$  مجموعة  $\psi - \Xi$  مفتوحة من النمط -  $icc$

$$cl^{*\psi}(\{p, q\} \cap \{p, s\}) = cl^{*\psi}(\{p\}) = \{p\} \subseteq int_\psi(\{p, q\}) = \{p\}$$

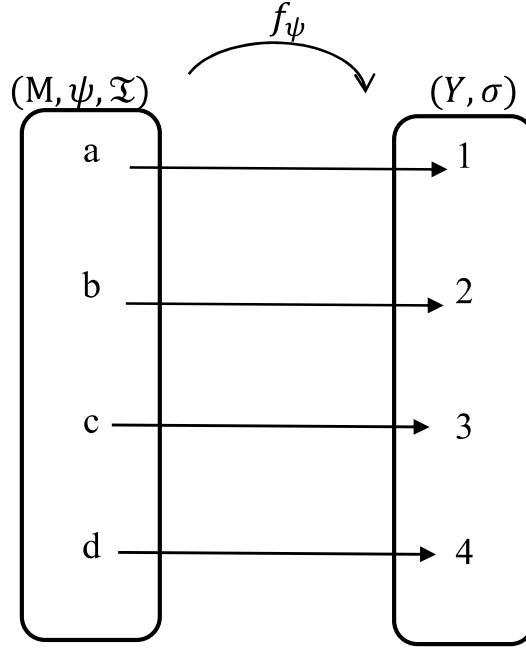
$$int_\psi(\{p, q\}) = \{p\} \text{ وكذلك}$$

ملاحظة (26-4-3)

لا توجد علاقة بين التطبيق  $\psi - \Xi$  المستمر من النمط -  $\alpha$  والتطبيق  $\psi - \Xi$  شبه المستمر من الفضاء التبولوجي المعمم المثالي  $(M, \psi, \Xi)$  إلى الفضاء التبولوجي المعمم  $(Y, \sigma)$  مع التطبيق  $\psi - \Xi$  المستمر من النمط -  $ic$  والتطبيق  $\psi - \Xi$  مستمر من النمط -  $icc$ .

مثال (27-4-3)

تأمل المخطط الآتي:



$$1) \psi = \{\emptyset, M, \{c\}, \{a, c\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{3, 4\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$f^{-1}(\{3, 4\}) = \{c, d\} \subset \text{int}_\psi(\text{cl}^*\psi(\text{int}_\psi(\{c, d\}))) = M$$

وبذلك تكون  $f^{-1}(\{3, 4\})$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $\alpha$  وكذلك تكون  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مفتوحة ولكن ليست  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $ic$ ، لأن

$$\text{cl}^*\psi(\{a, b, d\} \cap \{c, d\}) = \text{cl}^*\psi(\{d\}) = \{b, d\} \not\subseteq \text{int}(\{c, d\}) = \{c\}$$

وكذلك ليست  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $icc$ ، لأن  $f^{-1}(\{3, 4\})$  ليست  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $ic$ . وبذلك فإن  $f_\psi$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $\alpha$  و تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مستمر ولكن ليس تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $ic$  وليس تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $icc$ .

$$2) \psi = \{\emptyset, \{b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{1,2\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{c\}\}$$

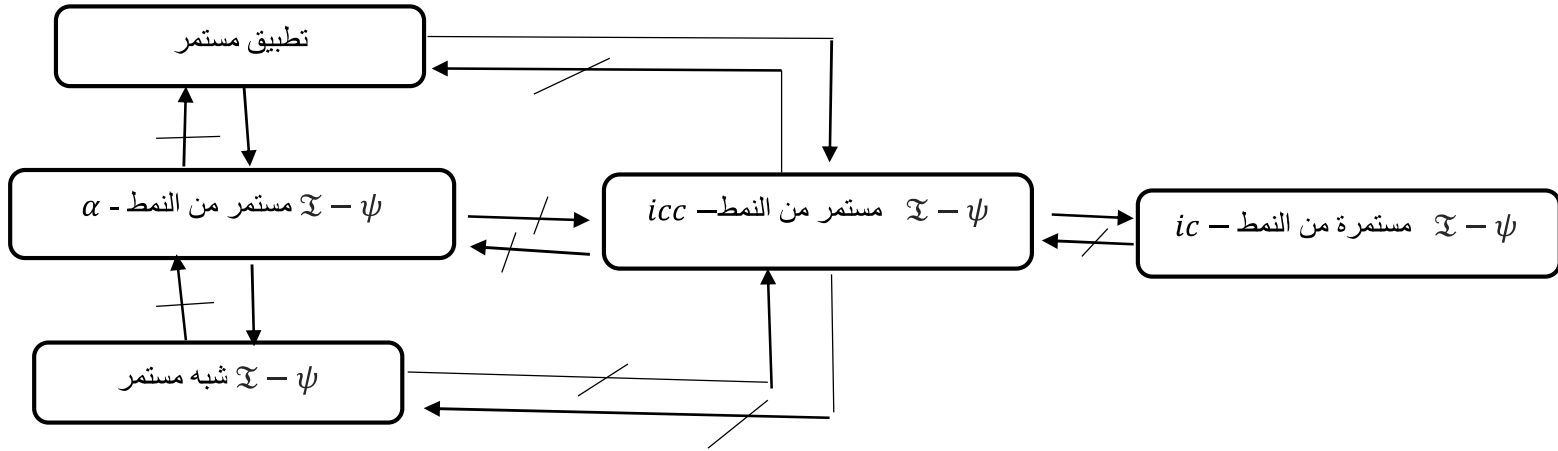
$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b\} \not\subseteq \text{int}_{\psi}(cl^{*\psi}(\text{int}_{\psi}(\{a,b\}))) = \{b\}$$

وبذلك تكون  $f^{-1}(\{1,2\})$  ليست مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $\alpha$  وكذلك ليست مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مفتوحة ولكن  $f^{-1}(\{1,2\})$  هي  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $ic$ ، لأنَّ

$$cl^{*\psi}(\{b,c\} \cap \{a,b\}) = cl^{*\psi}(\{b\}) = \{b\} \subseteq \text{int}(\{a,b\}) = \{b\}$$

لأنَّ  $f^{-1}(\{1,2\})$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $ic$  وبما أن  $\text{int}(\{a,b\}) = \{b\}$  فإن  $f^{-1}(\{1,2\})$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط  $icc$ . وبذلك فإنَّ  $f_{\psi}$  ليست تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $\alpha$  وليست تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  شبه مستمر ولكن  $f_{\psi}$  تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $ic$  وأيضاً تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط  $icc$ .

يمكن توضيح العلاقة بين استمرارية المجموعات المفتوحة أعلاه من خلال المخطط:



### المخطط (2-4-3)

تعريف (28-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجياً معممًا مثالياً وليكن  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجياً معممًا التطبيق

$$f_{\psi}: (M, \psi, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$$

1- تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط -  $ic$  الضعيف إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيف في  $M$  ، لكل  $V \in \sigma$  .

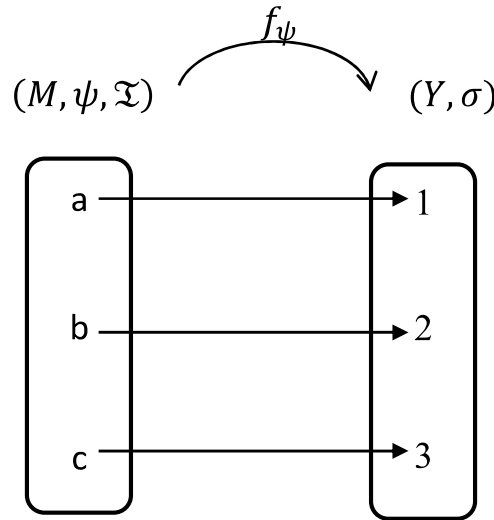
2- تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط -  $icc$  الضعيف إذا كان  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $icc$  الضعيف في  $M$  ، لكل  $V \in \sigma$  .

### مبرهنة (29-4-3)

ليكن  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  فضاءً تبولوجياً معممًا مثالياً وليكن  $(Y, \sigma)$  فضاءً تبولوجياً معممًا فإن كل تطبيق مستمر من  $(M, \psi, \mathfrak{T})$  الى  $(Y, \sigma)$  هو تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط -  $ic$  الضعيف والعكس غير صحيح.

البرهان. ليكن  $f_\psi: (M, \psi, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$  تطبيق مستمر وليكن  $V \in \sigma$  وعليه فإن  $f^{-1}(V)$  هي مجموعة  $\psi$ -مفتوحة في  $M$  وحسب نتيجة (4-4-3) ومبرهنة (15-4-3) فإن  $f^{-1}(V)$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيف وبذلك فإن  $f_\psi$  يكون تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط -  $ic$  الضعيف.

### مثال (30-4-3)



$$\psi = \{\emptyset, \{a, b\}\}$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{b\}\}$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{b\} \notin \psi$$

وبذلك فإن  $f_\psi$  لا يكون تطبيقاً مستمراً ولكن  $f_\psi$  تطبيق  $\mathfrak{T} - \psi$  مستمر من النمط -  $ic$  الضعيف، لأن  $f^{-1}(\{2\})$  مجموعة  $\mathfrak{T} - \psi$  مفتوحة من النمط -  $ic$  الضعيف

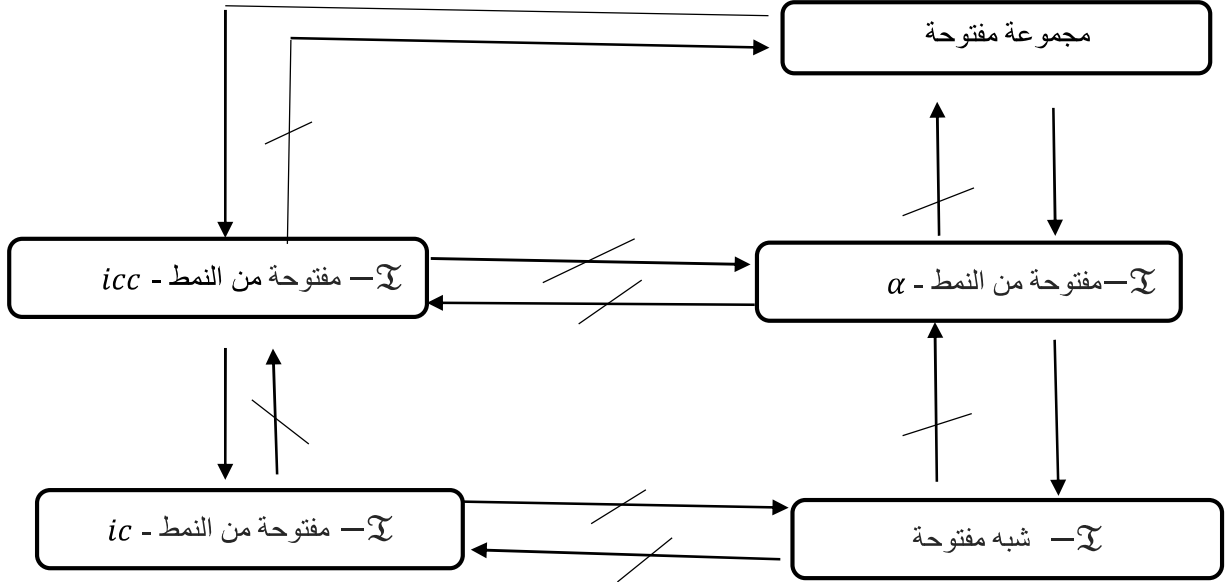
$$cl^{\psi}(cl_\psi(\{c\} \cap \{b\})) = cl^{\psi}(\{\emptyset\}) = \emptyset \subseteq int_\psi(\{b\}) = \emptyset$$

# الاستنتاجات والمقترحات

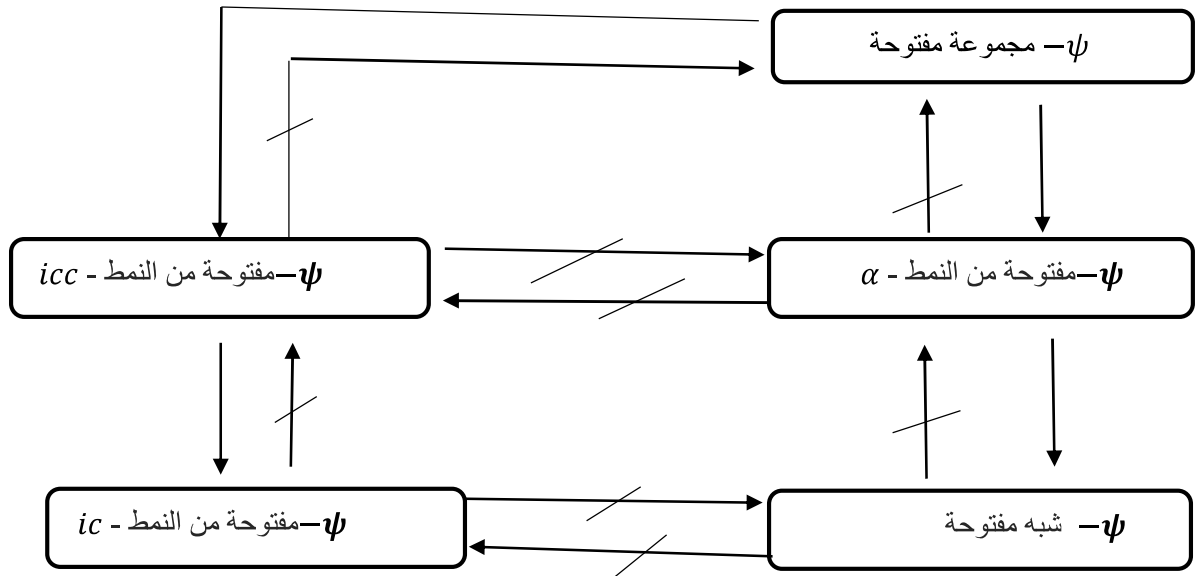
## الاستنتاجات

أولاً : لا توجد علاقة بين المجموعات المفتوحة من النمط  $\alpha$  وشبه المفتوحة مع المجموعات المفتوحة من النمط  $ic$  والمجموعات المفتوحة من النمط  $icc$  في الفضاءات التبولوجية التي تناولناها في هذه الرسالة وكالاتي:

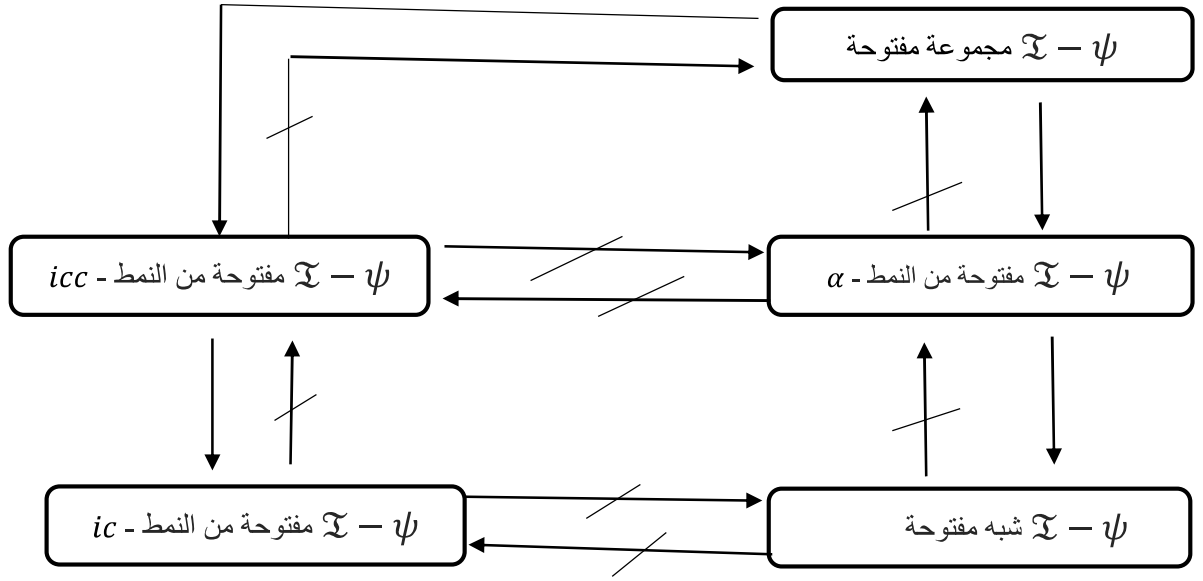
أ- في الفضاء التبولوجي المثالي



ب- في الفضاء التبولوجي المعمم

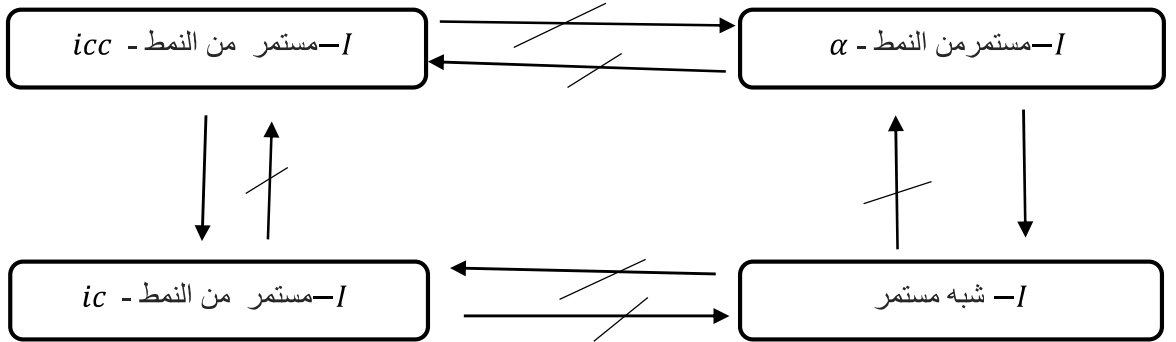


ج- في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي

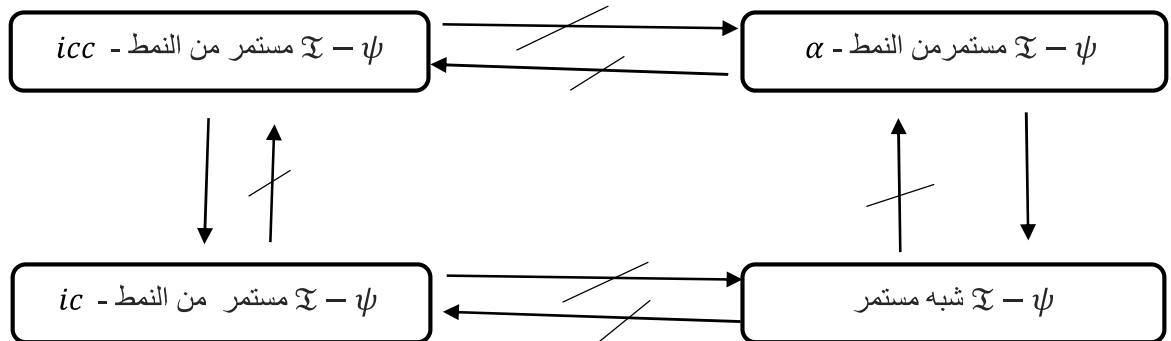


ثانيا : لاتوجد علاقة في الخواص ايضا وكما يأتي:

أ- في الفضاء التبولوجي المثالي



ب- في الفضاء التبولوجي المعمم المثالي



ثالثاً: استطعنا إعمام المجموعتين المفتوحتين من النمط -  $ic$  والنمط  $icc$  الى فضاءات أكثر عمومية وهي الفضاء التوبولوجي المثالي، الفضاء التوبولوجي المعمم والفضاء التوبولوجي المعمم المثالي.

#### المقترحات

نستطيع دراسة المجموعات المفتوحة من النمط -  $ic$  والمفتوحة من النمط -  $icc$  في الفضاءات التوبولوجية الثنائية المثالية (ideal bitopological spaces) والفضاءات التوبولوجية الناعمة والفضاءات التوبولوجية الضبابية المثالية.

# المصادر

- Abdullah, B. S., Askandar, S. W., & Mohammed, A. A. (2022). New classes of open sets in topological spaces. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 13(03), 247-256.
- Császár, Á. (2002). "Generalized topology generalized Continuity," Acta Math. Hungar. , 96, 351-357.
- Császár, Á. (2004). " Separation axioms for generalized topologies," Acta Math. Hungar. , 104, 63-69.
- Császár, Á. (2005). "Generalized open sets in generalized topologies," Acta Math. Hungar. ,106,53-66.
- Ganster, M., Jafari, S., & Navalagi, G. B. (2002). On semi-g-regular and semi-g-normal spaces. Demonstratio Mathematica, 35(2), 415-422.
- Govindappa, N. (2001)" Semi-generalized Separation Axioms in Topology" Space.
- Hatir, E., & Jafari, S. (2006). On weakly semi-I-open sets and another decomposition of continuity via ideals. Sarajevo Journal of Mathematics, 2(1), 107-114.
- Hatir, E. & Noiri,T. (2002)." On Decomposition of Continuity Via Idealization " Acta Math. Hungar. 96(4) ,341-349.
- Jankovic, D. S. & Hamlett, T. R. (1990) ,"New topologies from old via ideals", Amer. Math. Monthly, 97, 295–310.
- Kuratowski, K. (2014) " Topology", Vol. I. New York: Academic Press.

- Levine, N. (1963). " Semi –Open Sets and Semi –Continuity in Topological Spaces ", Amer. Math. Monthly, 70,36-41.
- Manoharan, R., &Thangavelu, P. (2013). Some new sets and topologies in ideal topological spaces. Chinese Journal of Mathematics, 2013(1), 973608.
- Mashhour, A. S., Hasanein, I. A., & El-Deeb, S. N. (1983).  $\alpha$ -continuous and  $\alpha$ -open mappings. Acta Mathematica Hungarica, 41, 213-218.
- Mohammed, M.W. & Mohammed, A.A., ( 2023) "Some Classes in Ideal Topological Spaces". EDUSJ, Vol, 32(2), (128- 133).
- Mohammed, M.W. & Mohammed, A.A. (2023) "Some Classes of open sets in generalized ideal topological spaces ". (preprint).
- Njasted, O. (1965). "On Some Classes of Nearly Open Sets. Pacific Journal of Mathematics" 15(3), 961-970.
- Pervin, W.J. (1985), "Foundations of General Topology", translated by Attallah Thamir Al-Ani, Mosul Univ.
- Shyamapada, M. (2016), "Ideal on generalized topological spaces." Scientia Magna 11(2) 14.
- Tyagi, Chauhan B. K. H. V. S. (2016), "On generalized closed sets in generalized topological spaces", Cubo, 18 (01), 27–45.
- Vaidyanathaswamy R. (1960), "Set Topology, Chelsea Publishing Company".

## Abstract

In this Thesis, types of generalized open sets in ideal topological spaces and ideal generalized topological spaces were presented, specifically the *ic*-open and *icc*-open . These types of sets were named according to the space of which they are a part, and we were able to obtain characteristics, features, and relationships for these sets that differ completely from the results obtained( Mohammed, Mohammed, 2023) In their studies of open sets of *i* and *ii* in the aforementioned spaces.

**University of Mosul**  
**Collage of Education**  
**for Pure Science**



## **ic- Open Sets in Ideal Topological Spaces**

**Rana Ibraheem Khidr Nazal**

M. Sc. Thesis  
Mathematics

Supervised by

Prof

**Dr. Amir Abdulillah Mohammed**

2024 A.D.

1446 A.H.