

# **The Numerical Treatment of Delay Differential Equations with Dental Application**

**A Thesis Submitted  
To  
The Council of the College of  
Computers Sciences and Mathematics  
University of Mosul**

**As Partial Fulfillment of the Requirements  
For the Degree of  
Doctor of Philosophy  
In  
Mathematics**

**By  
Ann Jalal Hanna Al-Sawoor  
(M. Sc. 2000)**

**Supervised By**  
**Professor Doctor**                      **Professor Doctor**  
**Reyadh Shaker Naoum**              **Abbas Younis Al-Bayati**

**2005 A.D.**

**1426 A.H.**

## ABSTRACT

This thesis involves the numerical treatment of delay differential equations.

After having reviewed the RETARD code, which was originally written by Hairer & Wanner in 1995 with the aim of solving delay differential equations (DDEs), a new arithmetic called OSFESOR code is presented in this thesis. The OSFESOR (Optimal stepsize for each step of RETARD) code is a tool for automatic implementation of DDEs in FORTRAN 90. Consequently, by using the OSFESOR code, it is possible, during the run of the program, to evaluate the solution of DDEs with optimal stepsize,  $H$ , for each step. In short, the use of OSFESOR code serves to validate the result provided by a computer, and to assure the user of the reliability of scientific computations.

In this thesis we discuss the effect of approximating the delay term on the order and local truncation error of the continuous Runge-Kutta method used in the OSFESOR code.

Also, this thesis modifies the numerical solution of initial value problems of the Delay Differential Equations (DDEs) by making it suitable to deal with Retarded Differential Equations (RDEs) with several delays:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), y(t - \tau_1), y(t - \tau_2), \dots, y(t - \tau_\mu)) & t \geq 0 \\ y(t) &= \phi(t) & t < 0 \end{aligned}$$

where  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\mu$  are positive constants,  $f$  and  $\phi$  denote given vector-valued functions. This thesis is concerned with stability behaviors of linear multistep method for RDEs . It is proved that the linear multistep method is GP-stable if it is A-stable for Ordinary Differential Equations (ODEs).

Finally, we demonstrate how a mathematical model can describe the logic of the most common dental caries phenomena and how we can use such a model to analyze the carious teeth status and help eradicate disease or even make the lesions regress. A model was set up using a system of delay differential equations and this is analyzed mathematically, and simulated using software written with MATLAB and FORTRAN 90 or 95. Computer software gives a Concrete picture of numerical predictions.

المعالجة العددية للمعادلات التفاضلية المتأخرة  
مع تطبيق في طب الأسنان

أطروحة مقدمة إلى

مجلس كلية علوم الحاسبات و الرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة

دكتوراه فلسفة

في

علوم الرياضيات

من قبل

آن جلال حنا الساعور

(ماجستير ٢٠٠٠)

بإشراف

الأستاذ الدكتور

عباس يونس البياتي

الأستاذ الدكتور

رياض شاكر نعوم

## المخلص

تتناول هذه الأطروحة المعالجة العددية للمعادلات التفاضلية المتأخرة.

بعد أن تم استعراض البرنامج RETAERD ، و المقدم من قبل العالمين هايرر و ورنر في عام ١٩٩٥ بهدف حل المعادلات التفاضلية المتأخرة عدديا ( DDEs ) ، فقد تم في هذه الأطروحة استحداث البرنامج OSFESOR . تشير الكلمة OSFESOR إلى (حجم الخطوة المثلى في كل خطوة للبرنامج RETARD والذي يعد من التطبيقات الأوتوماتيكية للمعادلات التفاضلية المتأخرة بلغة FORTRAN 90 . وبناءا عليه ، من خلال استخدام البرنامج الجديد فإنه اصبح من الممكن الآن حساب الحل لمعادلات تفاضلية متأخرة وذلك باستخدام حجم خطوة تكاملية مثلى ، H . باختصار ، استخدام برنامج OSFESOR يخدم في تحقيق افضل النتائج الحاسوبية و تضمن للمستخدم ثقة الحسابات العلمية.

في هذه الأطروحة ناقشنا تأثير تقريب صيغة التأخير على رتبة خطأ القطع الموضوعي

لطريقة رانج-كوتا المستمرة المستخدمة في البرنامج OSFESOR .

تطور هذه الأطروحة أيضا الحل العددي لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية ذات

التأخير الزمني وذلك من خلال تناولها لمعادلات تفاضلية ذات تأخير زمني من النوع المعوق

(RDEs) و بتأخير زمني متعدد ذات الصيغة:

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), y(t - \tau_2), \dots, y(t - \tau_\mu)) \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \phi(t) \quad t < 0$$

حيث أن  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\mu$  هي ثوابت موجبة و  $f$  و  $\phi$  تمثل دوال ذات قيمة اتجاهيه. تهتم هذه الأطروحة بدراسة سلوك الاستقرارية لطرائق المتعددة الخطوات الخطية لمسائل (RDEs). تم استنتاج أن طرائق المتعددة الخطوات هي مستقرة - GP للمعادلات التفاضلية المتأخرة إذا كانت مستقرة - A للمعادلات التفاضلية الاعتيادية .

و أخيرا تم بناء نموذج رياضي لوصف المنطق لظاهرة التسوس السني رياضيا" و بينا كيف يمكن استخدام هذا النموذج في تحليل حالة الأسنان المسوسة و العمل إما على إزالة هذا المرض أو من خلال جعل آفة التسوس تتردد. النموذج وصف كنظام معادلات تفاضلية متأخرة و تم تحليله رياضيا ثم محاكاته من خلال البرامج الجاهزة المكتوبة بنظام MATLAB و FORTRAN 90 أو FORTRAN 95 التي أعطت صورة ملموسة للتنبؤات العددية.