

Ministry of Higher Education and  
Scientific Research  
University of Mosul  
College of Computer Science and  
Mathematics  
Department of Mathematics



# Idempotent Divisor Graph of Commutative Rings

A Thesis Submitted to the Council of the College of  
Computer Science and Mathematics  
University of Mosul  
as a Partial Fulfillment of Requirements  
for the Degree of Doctor of Philosophy in  
Mathematics/ Pure

By  
**Mohammed Nawfal Authman Alghabsha**

Supervised by

**Prof.**

**Asst. Prof.**

**Dr. Nazar Hamdoon Shuker**

**Dr. Husam Qasem Mohammad**

---

2022 A.D.

1443 A.H.

## Abstract

The idempotent divisor graph of a commutative ring  $R$  is a simple graph  $\mathcal{I}(R)$  with vertices set in  $R - \{0\}$ , and any distinct two vertices  $x, y \in R^*$  are adjacent in  $\mathcal{I}(R)$  if and only if  $x \cdot y = e$  for some non-unit idempotent element  $e = e^2 \in R$ .

In this study we tackle the fundamental properties concerning idempotent divisor graph. First, we give all possible rings and graphs of  $\mathcal{I}(R)$  when  $|\mathcal{I}(R)| = i$ , for  $i = 7, 8, \dots, 14$ , and we prove these graphs are edge-blocks, so that we classify this graph by its diameter, we also find the distance between any two vertices of  $V(\mathcal{I}(R))$ , and find its center whenever the ring  $R$  is the reduced ring having idempotent divisor graph with diameter three. Furthermore, we show which graph can be a block itself graph. Next, we study some properties of dominating sets of  $\mathcal{I}(R)$ , and we find the domination and the connected domination numbers of this graph for any ring. We also, find some new fundamental properties of  $\mathcal{I}(R)$ , where  $R = F_{q_1} \times F_{q_2}$  and  $F_{q_1}$  and  $F_{q_2}$  are finite fields, as the size of  $\mathcal{I}(R)$ , the degree of its vertices, the diameter, the radius, the center, and its Hosoya polynomial and Wiener index of a graph  $\mathcal{I}(R)$ . Furthermore, we find the clique, the chromatic and the region chromatic numbers for every planar idempotent divisor graphs of commutative rings; we also prove the clique and the chromatic numbers are equal, for any planar idempotent divisor graph. Finally, we transform the planar idempotent divisor graph by coloring its region into optical art by using the reflection of vertices, edges and planes on the X or Y-axes.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الموصل  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
قسم الرياضيات

## بيان قواسم العنصر المتحايد للحلقات الابدالية

اطروحة مقدمة  
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل  
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في  
الرياضيات/ البحتة

من قبل

محمد نوفل عثمان الغبشة

بإشراف

الاستاذ المساعد

الدكتور حسام قاسم محمد

الاستاذ

الدكتور نزار حمدون شكر

## المستخلص

يعرّف بيان قواسم العنصر المتحايد للحلقة الإبدالية  $R$  بأنه البيان البسيط الذي تكون مجموعة رؤوسه في  $R^* = R - \{0\}$  وأي رأسين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$  فيه يكونان متجاورين إذا وفقط إذا كان  $x_1 \cdot x_2 = e$  لبعض قيم العنصر المتحايد  $e \in R$  بحيث ان  $e^2 = e \neq 1$ . ويرمز لهذا البيان بالرمز  $\mathcal{J}(R)$ .

يكمّن الهدف من هذه الدراسة في تناول الخواص الأساسية لبيان قواسم العنصر المتحايد. بدايةً، اعطينا كل الحلقات والبيانات التي تقابل البيان  $\mathcal{J}(R)$  عندما  $|\mathcal{J}(R)| = i$  لقيم  $i = 7, 8, \dots, 14$ ، واثبتنا ان هذا البيان خالٍ من الجسور. كذلك قمنا بتصنيف هذا البيان من حيث قطره ثم وجدنا المسافة بين رؤوس البيان ومركز البيان لأي حلقة مختزلة  $R$  تحقق  $\text{diam}(\mathcal{J}(R)) = 3$ ، ثم اثبتنا ان هذا البيان خالٍ من الرؤوس القاطعة. فضلاً عن ذلك، قمنا بدراسة بعض خواص المجموعات المهيمنة لهذا البيان ووجدنا عدد الهيمنة مع عدد الهيمنة المتصلة لهذا البيان ولأي حلقة. كذلك درسنا الخصائص الأساسية للبيان  $\mathcal{J}(R)$  حينما تمثل الحلقة  $R$  ضرباً مباشراً لحقلين، مثل حجم هذا البيان ودرجات رؤوسه وقطره ونصف قطره ومركزه. كما أوجدنا متعددة حدود هوسويا ودليل وينر لهذا البيان. تلا ذلك إيجاد عدد العصبية والعدد اللوني والعدد اللوني لمناطق البيان الخاصة ببيان قواسم العنصر المتحايد المستوي ولأي حلقة إبدالية. وفي الشأن نفسه، برهنا ان عدد العصبية يكون مساوياً للعدد اللوني لهذا البيان ولأي حلقة. وختاماً، قمنا بتحويل بيان قواسم العنصر المتحايد المستوي بعد رسمه وتلوين مناطقه الى فن بصري، باستعمال الانعكاس لرؤوسه وحافته ومناطقه على المحور  $X$  او  $Y$  في المستوي الاحداثي.