وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

طريقة التقريب الخطي المحلي لبعض المعادلات التفاضلية التصادفية غير الخطية مع التطبيق

أُطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات / الرياضيات الحاسوبية

من قبل

نبال صباح عبد الرحمن سعيد

بإشراف

أ. د. عبد الغفور جاسم سالم العبيدي

١٤٤٥هـ ٢٠٢٣ م

المستلخص :

تضمنت هذه الأُطروحة دراسة المعادلات التفاضلية التصادفية غير الخطية والحلول التحليلية والتقريبية لها. تمثلت الطرائق التحليلية بعدة طرائق، أما بصورة مباشرة باستخدام العامل التكاملي (impact factor) أو باستخدام التحويل الى الصيغة الخطية بعد اختبارها فيما اذا كانت قابلة للاختزال (reducible)، فاذا كانت غير قابلة للاختزال يتم إيجاد الحل بطريقة العامل التكاملي للمعادلات غير الخطية ، اما اذا كانت قابلة للاختزال فتم استخدام طرائق التحويل بالاعتماد على صيغة ايتو التكاملية والمقارن مع الصيغة الخطية العامة للمعادلات التفاضلية التصادفية ومقارنتها مع صيغة ايتو التكاملية من اجل إيجاد دالة التحويل المناسبة $U(t,x)$ ، كما تضمنت الأُطروحة طرائق التقريب بالخطية المحلية المقترحة من قبل العالم الياباني (Tuhro Ozaki) والتي تمثلت باستخدام صيغة مفكوك دالة تايلور للحد الحتمي (Deterministic term) بعد حذف الحدود التي تمتلك أسس اكبر من الواحد للتحويل الى الخطية والتي تكافئ (drift function) في المعادلة التفاضلية التصادفية. وفي هذه الدراسة حاولنا استخدام صيغة ايتو التكاملية لكلا الحدين (الحتمي والتصادفي) الذي يكافئ $f(t,y)$ دالة الانحراف (drift function) و$g(t,y)$ دالة الانتشار (diffusion function) . ولإجراء المقارنة بين الحل الذي تم الحصول عليه للمعادلات التفاضلية التصادفية باستخدام الطرق المباشرة او بطرائق التقريب حاولنا استخدام الطرائق العددية (أويلر– مارویاما وطريقة ميلستاين).

تتألف الأُطروحة من ستة فصول يشتمل الفصل الأول على المقدمة والاستعراض المرجعي ودراسة التكاملات التصادفية ونظرية المعادلات التفاضلية التصادفية باستخدام صيغة ايتو ، كما يتضمن التعريفات والمفاهيم الأساسية المتعلقة بهذا الموضوع، تضمن الفصل أيضًا التوسع التصادفي لسلسلة إيتو –تايلور و حل المعادلات التفاضلية التصادفية بطرائق تحليلية .

الفصل الثاني اشتمل على المقدمة والمعادلة التفاضلية التصادفية غير الخطية وحلولها التحليلية الدقيقة او المضبوطة باستخدام (عامل التكامل ، التكامل التصادفي بالتجزئة) ، كما

تضمنت طريقة معادلة التوصيل الحراري ، وكذلك طريقة التحويل ، والطرائق التقريبية العددية (اويلر –مارورياما ، وميلستين) وبعض الأمثلة لتوضيح الطرق المستخدمة المتمثلة بالتطبيقات .

الفصل الثالث فيشتمل على المقدمة و طريقة الاختزال (reducible) الى الخطية وطرائق التقريب و التطبيقات مع الطرائق العددية .

الفصل الرابع تمثل بدراسة الاستقرارية ، إذ حيث قمنا بتطبيق وشرح استقرار بعض المعادلات التفاضلية التصادفية غير الخطية باستخدام طريقة Lyapunov المباشرة الثانية ، واستخدمنا دوال Lyapunov التربيعية وبعض نظريات Lyapunov لمثل هذه المعادلات التفاضلية التصادفة لتحليل وشرح الاستقرار (درجة p– مستقرة ، متوسط مربع مستقر) ومستقر تقاربًا عشوائيًا(تصادفيا) في الحجم الكبير وتوضيح طرائق ببعض الأمثلة .

الفصل الخامس تمثل بالجانب التطبيقي على بيانات واقعية متمثلة بعدد نفوس العراق ، إذ تم استخدام التقدير للمعلمات بطريقتين (طريقة تقدير الامكان الاعظم والطريقة العامة للعزوم) . وذلك بدراسة السلسلة الزمنية لعدد نفوس العراق لسنوات (1960–2021)، وتم استخدام نماذج غير خطية متمثلة بنماذج معادلات تفاضلية تصادفية (اللوجيستية والجذر التربيعي) .

تضمن الفصل السادس من هذه الأُطروحة عددًا من الاستنتاجات والتوصيات التي تم التوصل إليها عن طريق هذه الدراسة.

Local Linear Approximation Method for Some NonLinear Stochastic Differential Equation with Application

A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
As a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics / Computational Mathematics

By
Nibal Sabah Abdulrhman Saeed

Supervised by

Professor
Dr. Abdulghafoor Jasim Salim Al-Aubaidy

2023 A.D. **1445 A.H.**

Abstract:

This thesis included a study of nonlinear stochastic differential equations and their analytical and approximate solutions. The analytical methods were represented in several ways, either directly by using the integrative factor or by using the transformation to the linear formula after testing whether it is reducible. if it is irreducible, the solution is found by the method of the integral factor for nonlinear equations. if it is reducible, then the transformation methods were used depending on the formula Integral and comparative Ito with the general linear formula of stochastic differential equations and compared with Ito's integral formula in order to find the appropriate transformation function $U(t,x)$. For the deterministic limit after deleting the terms that have exponents greater than one to convert to linear, which is equivalent to (drift function) in the stochastic differential equation. In this study, we tried to use Ito's integrative formula for both limits (the deterministic and the stochastic) which is equivalent to $f(t,y)$ the deviation function and $g(t,y)$ the diffusion function. In order to make a comparison between the obtained solution to the stochastic differential equations using the direct methods or the approximation methods, we tried to use the numerical methods (Euler- Maruyama and Milstein's method).

The thesis consists of six chapters. The first chapter includes the introduction, the reference review, the study of stochastic integrals, and the theory of stochastic differential equations using the Ito formula. It also includes definitions and basic concepts related to this topic. The chapter also includes the stochastic expansion of the Ito-Taylor series and the solution of stochastic differential equations by analytical methods.

The second chapter included the introduction and the non-linear stochastic differential equation and its exact analytical solutions using (integration factor, Stochastic Integration by Part), it also included Heat equation method as well as the transformation Method , Numerical approximate methods (Euler-Maruyama, Milstein) and some examples to illustrate the used methods .

The third chapter includes the introduction, the method of reduction to linearity, approximation methods, and applications with numerical methods .

The fourth chapter is a study of stability, where we applied and explained the stability of some nonlinear stochastic differential equations using the second direct Lyapunov method, and we used Lyapunov quadratic functions and some Lyapunov theories for such random differential equations to analyze and explain stability (stable p-degree, stable mean square) and randomly convergent stable in the large size and clarify the ways with some examples .

The fifth chapter represents the applied side on realistic data represented by the number of the population, where the estimation of the parameters was used in two ways (A Maximum Likelihood Estimation Method and Generalized Method of Moments) . By studying the time series of the Iraqi population for years (1960-2021), non-linear models represented by stochastic differential equations models (logistics and square root) were used.

The sixth chapter of this thesis included a number of conclusions and recommendations that were reached through this study.