Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Improve Numerical Methods for Solving Coupled Systems of Nonlinear Partial Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Mathematics Computational**

By

Israa Thanoon Younis Yahya

Supervised by

Prof. Dr. Ekhlass Saadallah Ahmed Muhammed

2024 A.D. **1446 A.H.**

ABSTRACT

The goal of this thesis is to improve the numerical solutions for coupled systems of nonlinear partial differential equations based on the explicit, Crank-Nicholson, and implicit and the exponential finite difference method, where they were applied to the general formula for coupled systems of nonlinear partial differential equations. The problem of exogenous points that appears in the presence of higher- level derivative was addressed with writing an algorithm for each method. The proposed method of the methods was applied in solving two different examples. The matrix equation for the Drinfeld's-Sokolov-Wilson (DSW) system was also derived using the implicit finite difference method. The convergence of the solution to the resulting matrix equation was also proven analytically.

Hybrid methods were presented to improve the resulting numerical solutions using two different techniques. The first is Adomian Plynomial to handle the non-linear part where it was combined with the four finite difference methods and an algorithm was developed for each method and then applied to two different examples. This technique proved its effectiveness by significantly reducing the error rate and the convergence of the solution to the first example was proven analytically. The second technique is using Homotopy Polynomial, where it was combined with the same method of the first technique and the proposed method was applied to the same two examples and this technique proved excellent efficiency and accuracy by reducing the error rate better than the first technique.

The Quintic-B-Spline Collocation Method was applied to solve the coupled system of nonlinear partial differential equations using two techniques. The first is applying Crank Nicholson's law to find only the partial derivatives, and the second technique is applying Crank Nicholson's law to the solutions u, v and their partial derivatives. The results show through comparing the solutions that the two techniques are equivalent in terms of accuracy and efficiency. The solutions were also improved by treating the nonlinear term in the system using both Adomian polynomials and Homotopy polynomials. The results also show that the Homotopy Polynomial technique is the most accurate and effective.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

تحسين الطرائق العددية لحل الانظمة المقترنة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

اسراء ذنون يونس يحيى

بإشراف

أ.د. إخلاص سعد الله أحمد محمد

١٤٤٦ هـ ٢٠٢٤ م

المستخلص

تهدف هذه الاطروحة الى تحسين الحلول العددية للأنظمة المقترنة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية بالاعتماد على طرق الفروقات المنتهية الصريحة وكرانك نيكولسون والضمنية وطريقة الفروقات المنتهية الصريحة الاسية حيث تم تطبيقهم على الصيغة العامة للأنظمة المقترنة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وتم معالجة مشكلة النقاط الخارجية التي تظهر عند وجود مشتقات من رتب عليا مع كتابة خوارزمية لكل طريقة وتم تطبيق الاسلوب المقترح للطرائق في حل مثالين مختلفين كما تم اشتقاق معادلة المصفوفة(Matrix Equation) لنظام Drinfeld's-Sokolov-Wilson (DSW) باستخدام طريقة الفروقات المنتهية الضمنية كما تم تحليليا اثبات تقارب الحل لمعادلة المصفوفة الناتجة .

تم تقديم طرائق هجينة لتحسين الحلول العددية الناتجة باستخدام تقنيتين مختلفتين , الاولى هي متعددة حدود ادوميان (Adomian Plynomial) لمعالجة الجزء غير الخطي حيث تم دمجها مع الطرائق الاربعة للفروقات المنتهية ووضع خوارزمية لكل طريقة ثم تطبيقها على مثالين مختلفين واثبتت هذه التقنية فعاليتها من خلال تقليل معدل الخطأ بشكل ملحوظ وتم اثبات تقارب الحل للمثال الاول تحليليا. اما التقنية الثانية فهي باستخدام متعددة الحدود هوموتوبي (Homotopy Polynomial) حيث تم دمجها بنفس الاسلوب للتقنية الاولى وتطبيق الاسلوب المقترح على نفس المثالين واثبتت هذه التقنية كفاءة ودقة ممتازة من خلال تقليل معدل الخطأ بشكل افضل من التقنية الاولى.

تم تطبيق طريقة Quintic-B-Spline Collocation Method لحل النظام المقترن للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام تقنيتين , الاولى تطبيق قانون CNلايجاد المشتقات الجزئية فقط , و التقنية الثانية هي تطبيق قانون CNعلى الحلولu, v ومشتقاتها الجزئية وتبين النتائج من خلال مقارنة الحلول ان التقنيتين متكافئتين من حيث الدقة والكفاءة و كذلك تم تحسين الحلول بمعالجة الحد غير الخطي في النظام باستخدام كل من متعددة حدود ادوميان ومتعددة حدود هوموتوبي وتبين النتائج

ايضا ان تقنية متعددة الحدود هوموتوبي (Homotopy Polynomial) هي الاكثر دقة وفعالية.

من خلال حل الانظمة المقترنة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية نستنتج انه بالامكان تهجين متعددة حدود ادوميان ومتعددة حدود هوموتوبي مع طرائق عددية اخرى من خلال معالجة الجزء غير الخطي, ولمعرفة مدى دقة وكفاءة الطرائق المهجنة نقارن الحلول التقريبية مع الحل المضبوط للمسائل ومن خلال التطبيق لاحظنا ان الطرائق المهجنة باستخدام متعددة حدود هوموتوبي تكون اكثر دقة وكفاءة من استخدام متعددة حدود ادوميان , علما ان البرمجة تمت باستخدام برنامج MatlabR2022a.