Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

New Analytics on Complex Transforms and Stochastic Differential Equations with Applications

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics / Computational Mathematics**

By

Ahmed Hussein Mohammad Shexo

Supervised by

Prof. Dr. Abdulghafoor Jasim Salim Ismael

Prof. Dr. Waggas Galib Atshan Suleiman

2025 A.D. **1447 A.H.**

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is studying new analytics on complex transforms and stochastic differential equations with applications. It is the study of applications of fractional calculus transforms for a new subclass of univalent functions using Hohlov operator with Hadamard product. A new subclass $\mathrm{AH}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \alpha, \beta, \gamma, \mathfrak{H})$ was introduced. Coefficient inequality, upper and lower bounds (distortion bounds), upper and lower bounds (growth bounds) with some related results were obtained. Also applications in upper terms of generalized Wright functions were introduced. The present dissertation deals with a solution of fractional Heat equation for a subclass of multivalent functions using fractional integral operator. Here, we make same new generalizations, of Riemann-Liouville (integral and derivative) to obtain coefficient inequality, upper bounds and the application of the fractional heat equation. Discussed differential subordinations and superordinations results of analytic univalent functions were discussed by using fractional differential operator as established sandwich theorems for univalent functions by using differential subordination and superordination results These theorems involving the application of fractional differential operator, $D^{p}_{\alpha,\beta,\delta} f(z)$. Also, some differential subordination and superordination results in the open unit disk U were derived, with sandwich-type results. The work of thesis also introduced third-order differential subordination and superordination results for univalent analytic functions associated with Zeta-Riemann fractional differential operator. Certain families of admissible functions were introduced and discuss some applications of third-order differential subordination for normalized analytic functions associated with novel fractional operator namely Zeta-Riemann fractional differential operator $D_S^{(\eta,\beta)} f(z)$. Some new results on differential subordination and superordination with Sandwich theorems are obtained. The applications of Beta negative Binomial distribution for third-order differential subordination and superordination of multivalent analytic functions were tackled. The implications of third order differential subordination in the context of analytic functions associated with statistical linear operator were explored. The investigation encompasses the consideration of specific admissible classes of 3^{rd} differential functions. Furthermore, this

exploration to establish a dual principle was extended, resulting in a sandwich-type outcome. Finally, fractional complex stochastic differential equations and their applications in mathematical finance and physics were studied. This idea discussed the connection between complex-valued stochastic equations and univalent functions within the open unit disk U . The classical complex Itô calculus has extended stochastic differential equations (SDEs) into the complex plane, enabling the modeling of processes with real and imaginary components. Itô lemma for a complex-valued function $df(\mathrm{z}_t)$. Also, here the fractional extension of complex Itô calculus incorporates memory effects by substituting conventional Brownian motion with fractional Brownian motion W_t^H. This generalization permits non-Markovian dynamics in which previous values affect future development.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

تحليلات جديدة حول التحويلات العقدية والمعادلات التفاضلية التصادفية مع التطبيقات

الفريسة المفترس للمعادلات التفاضلية التصادفية

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل
أحمد حسين محمد شيخو

بإشراف
أ.د. عبدالغفور جاسم سالم إسماعيل
أ.د. وقاص غالب عطشان سليمان

١٤٤٧ هـ ٢٠٢٥ م

ألمُستَخلصْ

الغرض من هذه الاطروحة هو دراسة تحليلات جديدة للتحويلات العقدية والمعادلات التفاضلية التصادفية مع التطبيقات. هي دراسة تطبيقات تحويلات الحساب الكسري لصنف جزئي جديد من الدوال احادية التكافؤ باستخدام مؤثر هوهلوف مع ضرب هادمرد. هنا قدمنا صف جزئي جديد $AH(a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta, \gamma, \mathfrak{H})$ وتم الحصول على متراجعة المعامل، الحدود العليا والدنيا (حدود التشوية) ، الحدود العليا والدنيا (حدود النمو) مع بعض النتائج المرتبطة. كما تم تقديم تطبيقات في الحدود العليا لدوال رايت المهمة، في هذه الدراسة تم التعامل مع حل معاملة الحرارة الكسرية لصنف جزئي من الدوال متعددة التكافؤ باستخدام مؤثر تكاملي كسري. تم العمل بعض تعميمات ليوفيل – ريمان (التكامل والمشقة)الجديدة . اذ تم الحصول على متراجعة المعامل ، الحدود العليا وتطبيق لمعادلة الحرارة الكسرية. تمت مناقشة نتائج التابعيات والتابعيات العليا التفاضلية للدوال احادية التكافؤ التحليلية باستخدام المؤثر التفاضلي الكسري بحيث تم انشاء مبرهنات الساندرج للدوال احادية التكافؤ باستخدام نتائج التابعيات والتابعيات العليا التفاضلية وهذه المبرهات مرتبطة بتطبيق المؤثر التفاضلي الكسري $D^{p}_{\alpha,\beta,\delta} f(z)$ وتم اشتقاق بعضا من نتائج التابعية والتابعية العليا التفاضلية في قرص الوحدة المفتوح U مع نتائج من النوع الساندوج . عمدت الدراسة أيضا الى تقديم نتائج التابعية و التابعية العليا التفاضلية فى الرتبة الثالثة للدوال احادية التكافؤ التحليلية المرتبطة بالمؤثر التفاضلي الكسري لزيتا – ريمان ومن هنا تم التوصل الى عوائل معينة من الدوال المقبولة وناقشة

بعض التطبيقات للتابعية التفاضلية في الرتبة الثالثة للدوال التحليلية الطبيعية المرتبطة بمؤثر كسري جديد ألا وهو المؤثر التفاضلي الكسري زينا – ريمان $D_S^{(\eta,\beta)} f(z)$ توصلت الدراسة الى بعض النتائج الجديدة حول التابعية و التابعية العليا التفاضلية مع مرهنات الساندوج. تم التعامل مع تطبيقات توزيع ثنائي بيتا السالب للتابعية والتابعية العليا التفاضلية من الرتبة الثالثة للدوال متعددة التكافؤ التحليلية ، هنا تم الكشف عن أثار التابعية التفاضلية فى المرتبة الثالثة في سياق الدوال التحليلية المرتبطة بالمؤثر الخطي الاحصائي. يتضمن تحقيقنا النظر في الاضاف المحددة المقبولة للدوال التفاضلية من الرتبة الثالثة. علاوة على ذلك، حيث تم توسيع هذا الاستكشاف لتأسيس مبدأ مزدوج، مما أدى الى نتيجة من نوع الساندوج . أخيراً تمت دراسة المعادلات التفاضلية التصادفية العقدية الكسورية وتطبيقاتها في الرياضيات المالية والفيزيائية . هذه الفكرة تناقش الربط بين المعادلات التصادفية ذات القيمة العقدية والدوال احادية التكافؤ في قرص الوحدة المفتوح U . يوسع حساب إيتو العقدي الكلاسيكي لمعادلات التفاضيلة المتصادفية (SDES) إلى المستوى العقدي مما يمكن من نمذجة العمليات بمكوناتها الحقيقية والتخيلية. معادلة إيتو لدالة ذات قيمة. عقدية $df(z_t)$ هذا ايضا ، يدمج الامتداد الكسري لحساب إيتو العقدي تأثيرات الذاكرة عن طريق استبدال الحركة البراونية التقليدية بالحركة البراونية الكسرية W_t^H. يسمع هذا التعميم بديناميكيات غير ماركوفية تؤثر فيها القيم.