

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



Improvement the New Iterative Method with Artificial Intelligence Techniques for Solving Fuzzy Time-Fractional Partial Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Mathematics Computational**

By

Mustafa Raed Najeeb Abdullah

Supervised by

Prof. Dr. Omar Saber Qasim Yahya

Abstract

New Iterative Method (NIM) is an emerged analytical tool for solving Fractional Partial Differential Equations FPDEs, due to its simple structure and ability to handle complex terms. However, the method's limitations in synthesizing solutions with high accuracy have prompted the need for methodological improvements that enhance its flexibility and efficiency. In response to this need, this thesis proposes a new development of the NIM, known as the α -Parameter New Iterative Method (α -PNIM). This modification improves the accuracy of approximate solutions by adjusting the expansion location to suit the characteristics of the problem being solved. The Black-Winged Kite Algorithm (BKA) was adopted as an optimization tool to search for the optimal value of the α parameter, due to its ability to reach optimal solutions in large and complex search spaces. Therefore, the proposed method does not rely on random selection or estimation, but rather integrates intelligent BKA to fine-tune performance.

The concept of Fuzzy Logic was also applied to some parameters using a Triangular Fuzzy Number (TFN), which is based on the q -cut, to represent problems involving a degree of uncertainty or ambiguity. This resulted in fuzzy fractional partial differential equations, which are complex models that require accurate and flexible solutions.

A FitNet neural network was also used to build a model that provides an approximate solution to FPDEs, leveraging its structure to obtain an approximate solution to the equation being solved. The model was trained on extended data representing different values of the variables x and t . The results showed that this step contributed to significantly increasing the efficiency of the method, particularly with regard to reducing the Mean Square Error (MSE) and Error Reminder (ER). By developing the α -PNIM and integrating it with intelligent optimization algorithms, artificial intelligence techniques, and fuzzy logic, this thesis contributes to providing

an integrated mathematical framework for solving complex problems associated with fractional-degree partial differential equations.

This study was validated on six examples of F-FPDEs. The results showed that the proposed method provides highly accurate approximate solutions with a significant reduction in error compared to other analytical methods. The effects of the fuzzing parameter q , the method tuning parameter α , the time variable t , and the fractional order k were also examined. The results showed that optimal tuning of α in conjunction with q enhances the convergence speed and reduces errors, while changes in k and t affect both the rate and accuracy of stabilization of the solutions. A significant correlation was also observed between q and α , with balanced values of these two parameters improving the quality of the solution, particularly in representing the time and fractional behavior of the studied systems.

All stages of this work were implemented by using an ASUS Vivobook computer, and several specialized programs were relied upon, including the MAPLE Program Version 2023 for solving differential equations using α -PNIM, and the MATLAB Program Version 2023 for BKA calculations and neural network data analysis.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

تحسين الطريقة التكرارية الجديدة مع تقنيات الذكاء الاصطناعي لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية الزمنية الضبابية

اطروحة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

مصطفى رائد نجيب عبدالله

بإشراف

أ.د. عمر صابر قاسم يحيى

الخلاصة

الطريقة التكرارية الجديدة (NIM) هي أداة تحليلية ناشئة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية (FPDEs)، وخاصةً المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الكسرية، بفضل بنيتها البسيطة وقدرتها على معالجة الحدود المعقدة. ومع ذلك، فإن محدودية هذه الطريقة في توليف الحلول بدقة عالية دفعت إلى الحاجة إلى تحسينات منهجية تعزز مرونتها وكفاءتها. استجابةً لهذه الحاجة، تقترح هذه الأطروحة تطويراً جديداً لـ NIM، والمعروفة باسم الطريقة التكرارية الجديدة ذات المعلمة α (α -PNIM). يُحسن هذا التعديل دقة الحلول التقريبية من خلال تعديل موقع التوسيع ليناسب خصائص المسألة التي يتم حلها. تم اعتماد Black-Winged Kite Algorithm (BKA) كأداة تحسين للبحث عن القيمة المثلى للمعلمة α ، نظراً لقدرتها على الوصول إلى حلول مثالية في مساحات بحث كبيرة ومعقدة. وبالتالي، لا تعتمد الطريقة المقترحة على الاختيار أو التقدير العشوائي، بل تتكامل مع BKA ذكية لضبط الأداء بدقة.

كما تم تطبيق مفهوم Fuzzy Logic على بعض المعاملات باستخدام الرقم الضبابي المثلثي (TFN)، الذي يعتمد على q-cut، وذلك لتمثيل المشكلات التي تنطوي على درجة من عدم اليقين أو الغموض. نتج عن ذلك معادلات تفاضلية ضبابية، وهي نماذج معقدة تتطلب حلولاً دقيقة ومرنة.

كما تم استخدام شبكة عصبية من نوع FitNet في لبناء نموذج يقدم حلاً تقريبياً لـ FPDEs مستفيداً من بنيتها في الحصول على حل تقريبي للمعادلة التي يتم حلها، حيث تم تدريب النموذج على بيانات موسعة تمثل قيماً مختلفة للمتغيرين x و t . أظهرت النتائج أن هذه الخطوة ساهمت في زيادة كفاءة الطريقة بشكل ملحوظ، لا سيما فيما يتعلق بتقليل متوسط مربع الخطأ والخطأ المتبقي من خلال تطوير α -PNIM ودمجه مع خوارزميات التحسين الذكية، وتقنيات الذكاء الاصطناعي، والمنطق الضبابي، تُسهّم هذه الأطروحة في توفير إطار رياضي متكامل لحل المشكلات المعقدة المرتبطة بالمعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الكسرية.

تم التحقق من صحة هذه الدراسة من خلال ستة أمثلة من F-FPDEs، حيث أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن الطريقة المقترحة توفر حلولاً تقريبية عالية الدقة مع تقليل ملحوظ في قيمة الخطأ مقارنة بالطرق التحليلية الأخرى. كما أن تأثير كل من معلمة التضبيب q ، ومعلمة ضبط الطريقة α ، ومتغير الزمن t ، والرتبة الكسرية k أظهرت النتائج أن الضبط الأمثل لـ α بالتزامن مع q يعزز من سرعة التقارب ويقلل من الأخطاء، في حين أن التغيرات في k و t يؤثر على كل من معدل ودقة الاستقرار في الحلول. كما لوحظ وجود ترابط ملحوظ بين q و α ، حيث تؤدي القيم المتوازنة لهذين البارامترين إلى تحسين جودة الحل بشكل خاص في تمثيل السلوك الزمني والكسري للأنظمة المدروسة

تم تنفيذ مراحل هذا العمل باستخدام حاسوب نوع ASUS Vivobook، وقد تم الاعتماد على عدد من البرامج المتخصصة، من بينها برنامج MAPLE Version 2023 في حل FPDEs باستخدام α -PNIM، وبرنامج MATLAB Version 2023 في حسابات BKA وتحليل بيانات الشبكة العصبية.