Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Generalized Tripotent Rings

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Master
in
Mathematics/ Pure Mathematics**

By

Ruaa Bashir Ali shekh

Supervised by

Prof. Dr. Nazar Hamdoon Shuker Mahmmod

2025 A.D. **1447 A.H.**

ABSTRACT

A New Class of Rings: Generalized Tripotent Rings (GT-rings)

This thesis introduces a new class of rings known as Generalized Tripotent Rings (GT-rings), which serves as a generalization of classical tripotent rings. A ring is defined as a GT-ring if, for every element, its square is tripotent, satisfying the algebraic identity . This new definition enables the study of a broader family of rings that retain structural similarities to their classical counterparts while exhibiting distinctive algebraic behavior.

Objectives and Scope

The primary objective of this research is to investigate the algebraic structure of GT-rings and analyze their fundamental properties. A comparative study is conducted between GT-rings and conventional tripotent rings to identify their distinctive features and theoretical significance within abstract algebra.

Core Contributions

The study further examines the structure of the Jacobson radical in GT-rings and establishes the relationships between GT-rings and several other important classes of rings, including tripotent, nil, clean, and strongly 2-nil clean rings. The findings contribute to a deeper understanding of the structural interplay among these different classes of rings and open new directions for further research in ring theory.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الحلقات الثلاثية المعممة

رسالة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في

الرياضيات / الرياضيات البحتة

من قبل

رؤى بشير علي شيخ

بإشراف

أ.د. نزار حمدون شكر محمود

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ م

المستخلص

في هذا الرسالة نقدم تعريف الحلقات الثلاثية وخصائصها ،ومن ثم نقدم تعميماً جديداً لمفهوم الحلقات ثلاثية القوة، وذلك من خلال تعريف ما نُطلق عليه "الحلقة ثلاثية القوة المعممة" أو ما يُعرف اختصاراً بـ *GT-ring*. تُعرّف الحلقة *GT* القوة المعممة" بأنها حلقة يكون فيها مربع كل عنصر يكون ثلاثي القوة. يفتح هذا المفهوم الباب لدراسة فئة أوسع من الحلقات التي تتشارك بعض الخصائص البنيوية مع الحلقات ثلاثية القوة التقليدية، ولكنها تتمتع بمرونة وبنية أغنى من حيث التنوع الجبري. تهدف الرسالة إلى دراسة الخصائص الأساسية لهذه الحلقات وتحليل بنيتها الجبرية بشكل مفصل، مع التركيز على سلوك العناصر داخلها. كما نقارن بين *GT-rings* والحلقات المعروفة مثل الحلقات ثلاثية القوة، والحلقات النقية (*clean*)، والحلقات النقية المعدومة (*nil clean*)، والحلقات النقية من النمط ٢ (*strongly 2-nil clean*)، وذلك بغرض الكشف عن أوجه التشابه والاختلاف. بالإضافة إلى ذلك، نُولي اهتماماً خاصاً بدراسة بنية جذر جاكوبسن (*Jacobson radical*) في هذه الحلقات، لما له من أهمية في فهم البنية العميقة للحلقة. من خلال هذه الرسالة، نأمل في تسليط الضوء على هذه الفئة الجديدة وتوسيع آفاق الدراسة في جبر الحلقات.