Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Enhanced Numerical Methods for Solving Fractional Partial Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Mathematics Computational**

By

Almutasim Abdulmuhsin Hamed Abdullah

Supervised by

Prof. Dr. Ekhlass Saadallah Ahmed

2024 A.D. **1445 A.H.**

Abstract

This thesis discusses using two different kinds of finite difference methods to find numerical solutions to fractional partial differential equations in respect to time-space, time, and space derivatives. These are the explicit finite difference method and the exponential finite difference method. The fraction derivatives are defined in two ways. First, the Grünwald-Letnikov formula is used for the space and time derivatives. Then, the Caputo derivative for time and the shifted Grünwald-Letnikov formula for space are employed.

The exponential difference method has been used to solve many partial differential equations, but has yet to be used to solve fractional partial differential equations. In this thesis, it is applied for the first time to find the numerical solution to fractional differential equations, and it proved to be a success through the results obtained.

Four different test problems are used to check the accuracy of the methods in different cases with various orders of fraction derivatives at different times. The results show that these methods can get close to the exact solution for each case study example, when the Caputo sense is used for time and the shifted Grünwald-Letnikov formula is used for space derivatives.

This study presents a new hybrid approach that combines finite difference methods with the Adomian polynomial to address the nonlinear term in the test examples. This hybrid technique provides a new method to deal with the therapy's nonlinear term in the equation, resulting in enhanced precision and effectiveness of the solution.

When used with the explicit finite difference methods with Caputo and the Grünwald-Letnikov formulas, the hybrid technique provides

excellent results, even when the fractional order derivatives are small and the time steps are significant.

Also, the fractional exponential finite difference method obtains more accurate results when combined with the Adomian polynomial than when using the Caputo and the Grünwald-Letnikov formulas alone. The methods were programmed using Matlab2021a.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

طرائق عددية محسنة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل
المعتصم عبد المحسن حامد عبدالله

بإشراف

أ.د. إخلاص سعد الله أحمد

١٤٤٥هـ ٢٠٢٤ م

المستخلص

في هذه الاطروحة تم توسيع استخدام طرق الفروقات المنتهية لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية في الحالات الثلاثة وهي الاشتقاق الكسري الزمني ، الاشتقاق الكسري المكاني والاشتقاق الكسري الزماني والمكاني معا. إذ تضمنت كل من طريقة الفروقات المنتهية الصريحة وطريقة الفروقات المنتهية الاسية. أيضا تم استخدام تعريف للاشتقاق الكسري بطريقتين أولاً: صيغة Grünwald-Letnikov في حالة المشتقة الكسرية للزمن والمكان، ثم صيغة Caputo للمشتقة الكسرية للزمن وصيغة Grünwald-Letnikov للمشتقة الكسرية المكانية.

تم اشتقاق طريقة الفروقات المنتهية الأسية الكسرية ولأول مرة لإيجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية مع كتابة خوارزميات مقترحة لكلتا الطريقتين وحسب حالات الاشتقاق الكسري . ايضاً تم معالجة النقاط التي تقع خارج منطقة الحل في حالة الاشتقاق الكسري الزماني . في التطبيق العملي تم استخدام اربعة مسائل بحالات مختلفة للمشتقة الكسرية ومن خلال النتائج العددية التي تم الحصول عليها لاحظنا ازدياد دقة وكفاءة طريقة الفروقات المنتهية الاسية في حالة استخدام صيغة Caputo للمشتقة الكسرية للزمن وصيغة Grünwald-Letnikov للمشتقة الكسرية المكانية.

كذلك تم تقديم طرق هجينة جديدة تربط بين طرق الفروقات المنتهية مع متعددة حدود أدوميان والهدف هو معالجة الحدود غير الخطية بمتعددة حدود أدوميان مع كتابة خوارزمية لكل حالة من الاشتقاق الكسري حيث تؤدي هذه التقنيات الجديدة الى تحسين دقة وفعالية الحلول للمسائل الاربعة التي تم تناولها في هذه الدراسة .نلاحظ ان التقنية الهجينة لطريقة الفروقات المنتهية الصريحة مع صيغة Caputo للمشتقة الكسرية للزمن وصيغة Grünwald-Letnikov للمشتقة الكسرية المكانية تعطي نتائج ممتازة حتى عندما تكون قيمة المشتقة الكسرية صغيرة والخطوات الزمنية كبيرة . بينما التقنية الهجينة لطريقة الفروقات المنتهية الاسية مع صيغة Caputo للمشتقة الكسرية للزمن وصيغة Grünwald-Letnikov للمشتقة الكسرية المكانية تعطي نتائج اكثر دقة بمقدار خطأ صغير جداً مقارنة مع التقنية الهجينة لطريقة الفروقات المنتهية الصريحة .تمت البرمجة للطرق باستخدام برنامج Matlab2021a.