Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Zero Divisors Graph of Principal Ideal Local Rings

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Master of Science
in
Mathematics\ Pure Mathematics**

By

Ahmed Sadeeq Ismail Khaleel

Supervised by

Prof. Dr. Husam Qasem Mohammad Abdulla

2025 A.D. **1447 A.H.**

Abstract

In this thesis, we provide a clear and detailed study of the zero-divisor graph $\Gamma(R)$, where R is a commutative local principal ideal ring. The objective is to determine the effect of the nilpotency index t on the structure and properties of the graph $\Gamma(R)$. This thesis shows the strong connection between ring theory and graph theory and offers a general method that holds for any value of t, where t is a positive integer.

Our study starts with the case when $t = 3$. In this case, the graph has two separate sets, and each vertex in one set is connected to all vertices in the other set, but not to any vertex in the same set. This is known as a semi-bipartite graph. When $t = 4$, a third set appears; therefore, a new graph with a new structure is formed, which is more complex, and this leads to changes in the values of the results obtained in the first case, including, the degree of the vertices, the number of graph edges, the value of the center of the graph, the clique number, and the chromatic number (noting that the relationship between them continues to be the same as in the first case — an equality). Also affected are the matching number, as well as the first and second Zagreb indices and the coindices.

After that, we generalize the previous results for any positive value of t, as the structure of the graph is formed by dividing its vertices into disjoint subsets defined by the equation $X_i = L^i \backslash L^{i+1}$, $i = 1, \dots, t-1$ where L is the maximal ideal of the ring. Based on this structure, two vertices belonging to subsets X_i and X_j are adjacent if $i + j \geq t$. This adjacency condition determines the structure of the graph and leads to different structures depending on whether t is even or odd positive integer.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

بيان قواسم الصفر لحلقات المثالية الرئيسة المحلية

رسالة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في

الرياضيات \ الرياضيات البحتة

من قبل

احمد صديق اسماعيل خليل

بإشراف

الأستاذ الدكتور حسام قاسم محمد عبد الله

2025 م 1447 هـ

المستخلص

في هذه الرسالة، نقدم دراسة لبيان القواسم الصفرية $\Gamma(R)$، حيث R حلقة مثالية رئيسية محلية تبديلية. الهدف هو تحديد تأثير مؤشر الانعدام t على بنية وخصائص البيان $\Gamma(R)$. تُظهر هذه الرسالة الصلة القوية بين نظرية الحلقات ونظرية الرسوم البيانية، وتقدم طريقة عامة تنطبق على اي قيمة t، حيث t عدد صحيح موجب

تبدأ دراستنا بالحالة عندما يكون $t = 3$ في هذه الحالة، يحتوي البيان على مجموعتين منفصلتين، وكل رأس في إحدى المجموعتين يكون متصلًا بجميع الرؤوس في المجموعة الأخرى، لكنه غير متصل بأي رأس في نفس المجموعة. ويُعرف هذا النوع من الرسوم البيانية باسم الرسم شبه-ثنائي (semi-bipartite graph). وعندما يكون $t = 4$ تظهر مجموعة ثالثة؛ وبالتالي، يتكوَّن بيان جديد ببنية جديدة أكثر تعقيدًا، مما يؤدي إلى تغييرات في القيم التي تم الحصول عليها في الحالة الأولى، بما في ذلك: درجة الرؤوس، عدد حافات البيان، قيمة مركز البيان، عدد العصبة، وعدد الألوان (مع ملاحظة أن العلاقة بينها لا تزال كما في الحالة الأولى — علاقة مساواة). كما تتأثر أيضًا قيمة عدد المطابقات، بالإضافة إلى مؤشري زغرب الأول والثاني والمتممات الخاصة بهما.

بعد ذلك، نقوم بتعميم النتائج السابقة لأي قيمة موجبة لـt ، حيث تتكون بنية البيان من خلال تقسيم رؤوسه إلى مجموعات منفصلة يُعرَّف كل منها بالمعادلة $X_i = L^i \backslash L^{i+1}$ ، حيث L هو المثالي الأقصى في الحلقة .وبناءً على هذه البنية، فإن رأسيْن ينتميان إلى المجموعتين X_i و X_j يكونان متجاورين إذا تحقق الشرط $i + j \geq t$. إن شرط التجاور هذا يحدد بنية البيان ويؤدي إلى تكوينات مختلفة تبعًا لكون t عددًا زوجيًا أو فرديًا.