

**Ministry of Higher Education and  
Scientific Research  
University of Mosul  
College of Computer Science and  
Mathematics  
Department of Mathematics**



## **On Nil – Clean Ideals**

**A Thesis Submitted to the Council of the College of  
Computer Science and Mathematics  
University of Mosul  
as a Partial Fulfillment of Requirements  
for the Degree of Master of Science**

**in  
Mathematics / Pure**

**By**

**Muayad Mohammed Noor Mohammed Ameen  
Alali**

**Supervised by**

**Prof.**

**Dr. Nazar Hamdoon Shuker**

---

**2022 A.D.**

**1444 A.H.**

## Abstract

An element  $a \in R$  is known a strongly nil – clean element if  $a = e + n$ ,  $en = ne$  where  $e = e^2$  and  $n \in N(R)$ . An ideal  $I$  is called a strongly nil – clean ideal if every element of  $I$  is a strongly nil – clean element.

In this thesis further properties of a strongly nil – clean ideal were given. The notion of a strongly nil\* clean ideal, was introduced and that  $I$  is a strongly nil\* clean ideal if for every  $a \in I$ ,  $a = e_1 - e_1e_2 + n$ , where  $e_1, e_2$  are idempotents and  $n$  is a nilpotent that commute with one another. Some basic properties of a strongly nil\* clean ideal were given, and it's connection with other ideals were derived.

Some of the main results of the present work are is follows:

- 1- Let  $R$  be a commutative ring, and let  $I$  is nil – clean ideal of  $R$  then any element of  $I$  has a unique decomposition.
- 2- If  $R$  is local ring then every nil – clean ideal is a nil ideal.
- 3- If  $I$  and  $J$  are strongly nil – clean ideals with every pair of idempotent element is orthogonal, then  $I + J$  is a strongly nil – clean ideal.
- 4- If  $I$  is strongly tripotent ideal  $a \in I$ ,  $a = t + n$ ,  $t^3 = t$ ,  $n \in N(R)$ , then  $I \cap J(R)$  is a nil ideal.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الموصل  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
قسم الرياضيات

## في المثاليات النقية المعدومة

رسالة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل  
كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في  
الرياضيات/ البحتة

من قبل

مؤيد محمدنور محمدأمين العلي

بإشراف

الاستاذ

الدكتور نزار حمدون شكر

## المستخلص

يقال للعنصر  $a$  في الحلقة  $R$  بأنها نقية معدومة بقوة إذا كانت  $a = e + n, en = ne$  حيث  $e$  عنصر متحايد، و  $n$  عنصر معدوم القوى. ويقال للمثالية  $I$  بأنها مثالية نقية معدومة بقوة إذا كان كل عنصر في  $I$  عنصر نقي معدوم بقوة.

في هذه الرسالة اعطينا خواص جديدة لهذا النوع من المثاليات. واعطينا تعريفاً جديداً للمثاليات النقية المعدومة\* بقوة بالشكل التالي: يقال للمثالية  $I$  بأنها نقية معدومة\* بقوة إذا كان كل عنصر  $a \in R$  يكتب بالشكل التالي  $a = e_1 - e_1e_2 + n$  حيث  $e_1, e_2$  عناصر متحايدة و  $n$  عنصر معدوم القوى وتبادلية مع بعضها. اعطينا بعض الخواص الأساسية لهذا النوع من المثاليات، ووجدنا بعض العلاقات لهذه المثاليات مع مثاليات أخرى.

فيما يلي بعض النتائج الرئيسية :

١- ليكن  $R$  حلقة ابدالية و المثالية  $I$  هي مثالية نقية معدومة في الحلقة  $R$  فان كل عنصر في المثالية  $I$  له تمثيل وحيد.

٢- اذا كان  $R$  حلقة محلية فان كل مثالية نقية معدومة هي مثالية معدومة.

٣- اذا كان  $I$  و  $J$  مثالية نقية معدومة بقوة مع كل زوج من العناصر المتحايدة متعامدة، فان  $I + J$  هي مثالية نقية معدومة بقوة.

٤- اذا كان  $I$  مثالية في الحلقة  $R$  وكل عنصر  $a$  في المثالية  $I$  عبارة عن  $a = t + n, t^3 = t$  و  $n$  عنصر معدوم القوى فان  $I \cap J(R)$  هي مثالية معدومة.