وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

بعض أنواع المشتقات من النمط - (g, h) على جبور باناخ الموسعة مقاسياً باستخدام تشاكلات مستمرة

أطروحة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في

الرياضيات/الرياضيات البحتة

من قبل

لمياء قادر إسماعيل خليل

بإشراف

أ. د. عامر عبد الإله محمد حسين

١٤٤٥هـ ٢٠٢٣م

المستخلص

قامت هذه الأطروحة على غرار دراسة خواص التطبيقات الخطية المعرفة على جبور باناخ من قبل العديد من الباحثين، بدراسة وإعمام بعض أنواع المشتقات المعرفة على جبور باناخ الموسعة مقاسياً، وذلك بالاعتماد على تشاكلين يؤثران على جبور باناخ الموسعة مقاسياً.

ليكن $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ -* جبر -* باناخ موسع مقاسي و$\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ $-*$ مقاسي ثنائي- ($\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}-*$) باناخ، وليكن كل من g، t و h تشاكلات مستمرة معرفة من $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}-*$ إلى $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}-*$، أثبتنا الآتي:

إذا كان $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ جبر باناخ موسع مقاسي مع الضرب الصفري وكل من $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ أساسياً، فإن التطبيق الخطي المستمر $D:\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}\to\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ يكون ضد المشتقة من النمط $-(g,h)$ عند الصفر إذا وفقط إذا يوجد $d:\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}\to\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}^{**}$ ضد المشتقة من النمط $-(g,h)$ وعنصر (ζ,η) ينتمي إلى $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}^{**}$ بحيث إنَّ $D=d+(\zeta,\eta)g=d+h(\zeta,\eta)$.

وأثبتنا المشتقة الثلاثية المحلية من النمط $-(g,h)$ المستمرة من جبر-* باناخ موسع مقاسي الواحدي $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}-*$ إلى ثنوياتهم المتكررة $(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}-*)^{(n)}$ تكون تطبيقاً متماثلاً ومشتقة ثلاثية من النمط $-(g,h)$.

وأيضاً إذا كان التطبيق الخطي المستمر D المعرف على $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}-*$ الواحدي مشتقة ثلاثية من النمط $-(g,t,h)$ عند العنصر المحايد (عند الصفر)، فإن:

D.1 تكون مشتقة معممة من النمط $-(g,h)$.

D.2 تكون مشتقة من النمط $-(g,h)$ $-*$ ومشتقة ثلاثية من النمط $-(g,t,h)$، عندما تكون $D(1,0)=(0,0)$.

D.3 تكون مشتقة ثلاثية من النمط $-(g,t,h)$.

فضلاً عن ذلك أثبتنا أنّه إذا كان $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ قابلاً للتماثل إذ إنَّ $(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X})^*$ كاملاً بشكل متسلسل ضعيف و $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ أساسياً، والتطبيق الخطي المستمر D من $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ إلى $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ مشتقة جوردن من النمط $-(g,h)$ عند الصفر، عندئذ يوجد d مشتقة من النمط $-(g,h)$ وكذلك يوجد تشاكل Φ، وكلاهما معرفان من $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ إلى $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ بحيث إنَّ $D=d+\Phi$، وتوصلنا الى نتائج مماثلة بالنسبة للتطبيقات الخطية المستمرة التي تكون مشتقات جوردن من النمط $-(g,h)-*$ عند الصفر المعرفة على جبور-* باناخ الموسعة مقاسياً.

واخيراً، أثبتنا كل مشتقة عُليا محلية من النمط $-(g,h)$ معرفة على جبر باناخ موسع مقاسي قابل للتماثل تكون مشتقة عُليا من النمط $-(g,h)$. فضلاً عن ذلك، فإنَّ كل ضد المشتقة العُليا المحلية من النمط $-(g,h)-*$ المعرفة على جبر-* باناخ موسع مقاسي قابل للتماثل تكون ضد المشتقة العُليا من النمط $-(g,h)-*$.

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and Mathematics
Department of Mathematics

Some Types of (g, h)-Derivatives on Module Extension Banach Algebras Using Continuous Homomorphisms

A Thesis Submitted to the Council of the College of Computer Science and Mathematics University of Mosul as a Partial Fulfillment of Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics/Pure Mathematics

By

Lamia Kader Ismail Khalil

Supervised by

Prof. Dr. Amir Abdulillah Mohammed Hussein

2023 A.D. **1445 A.H.**

Abstract

This thesis is based on similar to the study the properties of the linear mappings on Banach algebras by many researchers, we study and generalized some types of the derivations on module extension Banach algebra, depending on the two homomorphisms that effects on module extension Banach algebras.

Let $* -\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ be module extension Banach $*$-algebra and $* -\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ be a Banach $(* -\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X})$-bimodule, and let g, t and h be continuous homomorphisms on $* -\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ to $* -\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$. We proved the following:

If $* -\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ is a module extension Banach algebra with zero product and every $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ are essential, then the continuous linear mapping $D : \mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X} \to \mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ is (g,h)-anti derivation at zero, if and only if there exist a (g,h)-anti derivation $d : \mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X} \to \mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}^{**}$ and $(\zeta,\eta) \in \mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}^{**}$ such that $D = d + (\zeta,\eta)g = d + h(\zeta,\eta)$.

And we proved a continuous (g,h)- local ternary derivation from unital module extension Banach $*$-algebra into their periodical duals are symmetrical mapping and (g,h) -ternary derivation.

And also, if the continuous linear mapping D on unital $* -\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ is (g,t,h) -ternary derivation at the unite element (at zero), then:

1. D is (g,h)- generalized derivation.
2. D is $*$ - (g,h) - derivation and (g,t,h) - ternary derivation, when $D(1,0) = (0,0)$.
3. D is (g,t,h) - ternary derivation.

In addition to that we proved, if $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ is a symmetric amenability such that $(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X})^*$ is weakly sequentially complete and $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ is essential, and the continuous linear mapping D from $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ is (g,h)-Jorden derivation at zero, then there exists (g,h)-derivation d and also there exists homomorphism Φ, identifiers from $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{Z}$ such that $D = d + \Phi$. We obtained similar results of the continuous linear mappings that are $*$ - (g,h) - Jorden derivations at zero on module extension Banach $*$-algebras.

Finally, we proved each (g,h)- local higher derivation on a symmetric amenability module extension Banach algebra is (g,h)- higher derivation. In addition to that, each $*$-(g,h)- anti local higher derivation on a symmetric amenability module extension Banach $*$-algebra is $*$-(g,h)-higher derivation.