

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



On 2-Nil Clean Rings and Strongly 2-Nil-Regular Clean Rings

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of science in
Mathematics/Pure Mathematics**

**By
Fedaa Ayyed Nayyef Abdallah**

**Supervised by
Asst. Prof. Zubaida Mohammed Ibraheem**

2023 A.D.

1444 A.H

Abstract

A ring R is called 2-nil-clean, if every element in R can be written as a sum of two idempotent and a nilpotent element.

This thesis has studied some new properties of 2-nil-clean rings. An element a in a ring R is said to be strongly 2-nil-regular clean, if it is the sum of two regular elements r_1, r_2 and nilpotent b that commute. One of the main objectives of this thesis is to study a new type of ring which is strongly 2-JN-regular clean. Also we explore some basic properties of these kinds of rings with the relation among them.

The most important results arrived at are:

1. Let R be an abelian ring, and $a \in R$ be 2-nil-clean element. Then $a(a - 1)(a - 2)$ is nilpotent element.
2. Let R be a commutative local ring and L be a maximal ideal. Then R is 2-nil-clean ring, if $R/L \cong Z_3$.
3. Let R be a ring with $\text{reg}(R) \subseteq C(R)$. If R is strongly 2-nil-regular-clean, then $C(R)$ is strongly 2-nil-regular-clean.
4. Let R be strongly 2-nil-regular-clean ring with $2 \in U(R)$. Then R is 2-nil good ring.
5. Let R be local ring. Then every element in R is a sum of three units if R is strongly 2-JN-regular clean rings.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الحلقات النقية معدومة القوى من النمط- ٢ والحلقات النقية المنتظمة معدومة القوى بقوة من النمط- ٢

رسالة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في
الرياضيات/ الرياضيات البحتة

من قبل

فداء عايد نايف عبدالله

بإشراف

أ.م. زبيدة محمد ابراهيم

المستخلص

يقال للحلقة R بأنها نقية معدومة القوى من النمط-٢ إذا كان كل عنصر a في الحلقة R يمكن كتابته كحاصل جمع من عنصرين متحايدين وعنصر معدوم القوى. في هذه الرسالة تمت دراسة بعض من الخواص الجديدة للحلقات النقية المعدومة القوى من النمط-٢.

يقال للعنصر a في الحلقة R بأنه نقي منتظم معدوم القوى من النمط-٢, إذا كان حاصل جمع عنصرين منتظمين r_1, r_2 وعنصر معدوم القوى b بحيث ان $r_1 r_2 = r_2 r_1$, $r_1 b = b r_1$, $r_2 b = b r_2$ ومن الأهداف الرئيسية لهذه الرسالة دراسة نوع جديد من الحلقات هي الحلقة النقية المنتظمة بقوة من النمط JN-٢. أعطينا الخواص الأساسية لهذه الحلقات وعلاقتها مع الحلقات الأخرى. ومن أبرز النتائج التي حصلنا عليها:

١. لتكن R حلقة أبيلية و $a \in R$ عنصر نقي معدوم القوى من النمط-٢. فان $a(a-1)(a-2)$ يكون عنصر معدوم القوى.
٢. لتكن R حلقة محلية تبديلية و L هي مثالي اعظم. فان R هي حلقة نقية معدومة القوى من النمط-٢, إذا كان $R/L \cong Z_3$.
٣. لتكن R حلقة و $\text{reg}(R) \subseteq C(R)$. إذا كانت R حلقة نقية منتظمة معدومة القوى بقوة من النمط-٢, فان $C(R)$ يكون نقي منتظم معدوم بقوى من النمط-٢.
٤. لتكن R حلقة نقية منتظمة معدومة القوى من النمط-٢ و $2 \in U(R)$. فان R حلقة جيدة معدومة القوى من النمط-٢.
٥. لتكن R حلقة محلية. فان كل عنصر في R هو حاصل جمع ثلاثة عناصر لها معكوس, إذا كانت R هي الحلقة النقية المنتظمة القوى بقوة من النمط J-٢.