

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics



Approximate Transformational methods for solving Fractional Hirota-Satsuma coupled KdV equations

A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Mathematics Computational

By

Mohamed Ahmad Khadr Ibrahim

Supervised by

Prof. Dr. Abdulghafor Mohemmed Amin Khudhur

Abstract

The chief objective of this thesis is to use four approximate transformational methods to solve the fractional-order coupled Hirota-Satsuma equations (HSC-KdV) with the lowest error rate. These equations are used to model longitudinal waves propagating in shallow water and are used in many applications in fluid mechanics. This is accomplished in two stages:

The first: Transforming a fractional partial differential equation into an ordinary differential equation using properties of transformations.

The second: Using methods such as ADM, KDM and HPM to transform nonlinear terms into a recurrence relationships. This is represented by introducing a new tool for solving any mathematical system in various fields, which is the hybridization of the Kalla method with the Sumudu transform (ST-KDM), provided it is represented by fractional partial differential equations. This hybrid method combines the Sumudu transform with the Kalla decomposition method. This method reduces computational effort compare to ADM. The Sumudu transform converts fractional differential equations to ordinary differential equations and then uses a Kalla polynomial to transform the nonlinear terms into a series of equivalent linear terms. ST-KDM provides solutions in a series converges to the exact solution. The steps of this method are explained in a simple manner, its convergence is studied, its algorithm is created, and it is applied to three different examples of fractional-order differential equations to demonstrate its efficiency and accuracy in finding approximated solutions. One of these examples is the HSC-KdV equation.

Three approximate methods were also applied to solve HSC-KdV equations with the lowest error rate. These methods are ST-ADM and

NT-ADM, which combine the Sumudu transform and the Natural transform with Adomian decomposition method, respectively and ZZ-HPM, which combines the ZZ transform and Homotopy perturbation method (HPM). These methods provide approximate solutions in the form of a series that converges to the exact solution. Comparison Tables were created for these methods with the exact solution, and Figures were drawn to demonstrate the accuracy of these methods. The effect of the fractional order α on the resulting solutions for each method was also plotted.

The results of these three methods were then compared with the proposed new method under the same conditions and taking only three terms from the solution series for each method by finding the mean absolute error MAE at $\alpha = 1$ and the Least Square Weighted Function error LSWF at $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$ for each method. The results show that the proposed method provides highly accurate approximate solutions that are close to the exact solutions, with minimal computational effort.

The software used in this thesis is Maple 19.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

طرائق تحويلية تقريبية لحل معادلات Hirota- Satsuma KdV المقترنة الكسرية

اطروحة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

محمد احمد خضر ابراهيم

بإشراف

أ.د. عبدالغفور محمد امين خضر

الملخص

الهدف الرئيسي من هذه الاطروحة هو استخدام أربعة طرائق تحويلية تقريبية لحل معادلات هيروتا ساتسوما المقترنة ذات الرتبة الكسرية (HSC-KdV) بأقل معدل خطأ والتي تُستخدم لنمذجة الموجات الطولية المنتشرة في المياه الضحلة وتُستخدم في العديد من التطبيقات في ميكانيكا الموائع. ويتم ذلك من خلال مرحلتين هما:

الأولى: تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية الى معادلة تفاضلية اعتيادية من خلال استخدام خصائص التحويلات.

الثانية: استخدام طرائق مثل ADM, KDM و HPM لتحويل الحدود غير الخطية الى علاقات تكرارية. وتمثل ذلك من خلال تقديم أداة جديدة لحل أي نظام رياضي في مختلف المجالات وهي تهجين طريقة كالا مع تحويل سومودو ST-KDM بشرط تمثيله بمعادلات تفاضلية جزئية كسرية، وهي طريقة هجينة تجمع تحويل سومودو مع طريقة كالا التحليلية تخنزل هذه الطريقة الجهد الحسابي مقارنة مع ADM. يقوم تحويل سومودو بتحويل المعادلات التفاضلية الكسرية الى معادلات تفاضلية اعتيادية ثم تستخدم متعددة حدود كالا لتحويل الحدود غير الخطية إلى سلسلة من الحدود الخطية المكافئة. تقدم ST-KDM الحلول بشكل متسلسلة تتقارب الى الحل المضبوط. تم توضيح خطوات هذه الطريقة بشكل مبسط ودراسة تقاربها وأنشاء الخوارزمية الخاصة بها وتطبيقها على ثلاثة امثلة مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية لبيان كفاءتها ودقتها في إيجاد الحلول التقريبية ومن ضمن هذه الامثلة هو معادلات HSC-KdV.

كما تم أيضا تطبيق ثلاثة طرائق تقريبية لحل معادلات HSC-KdV بأقل معدل خطأ. هذه الطرق هي ST-ADM و NT-ADM، التي تجمع بين تحويل سومودو والتحويل الطبيعي مع طريقة تحليل أدوميان، على التوالي و ZZ-HPM التي تجمع بين تحويل ZZ وطريقة اضطراب

التمائل. تقدم هذه الطرائق الحلول التقريبية على شكل متسلسلة تتقارب نحو الحل المضبوط. تم إنشاء جداول المقارنات لهذه الطرق مع الحل المضبوط ورسم الاشكال التي تبين مدى دقة هذه الطرق وأيضا تم رسم تأثير الرتبة الكسرية α على الحلول الناتجة لكل طريقة.

بعد ذلك، قورنت نتائج هذه الطرائق الثلاثة بالطريقة الجديدة المقترحة في ظل نفس الظروف مع أخذ ثلاثة حدود فقط من سلسلة الحلول لكل طريقة، وذلك بإيجاد معدل الخطأ المطلق MAE عند $\alpha = 1$ وخطأ دالة التربيع الصغرى المرجحة LSWF عند $\alpha =$ 0.25, 0.5, 0.75 لكل طريقة. أظهرت النتائج أن الطريقة المقترحة توفر حلولاً تقريبية عالية الدقة وقريبة من تلك الحلول الدقيقة و بأقل مجهود حسابي. البرنامج المستخدم في هذه الاطروحه هو Maple 19.