Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

New Types of Banach Algebra-Valued Set Functions

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics / Pure**

By
Wafa Younus Yahya Al-Ta'ee

Supervised by
Prof. Dr. Noori Farhan Al-Mayahi

2022 A.D. **1444 A.H.**

Abstract

The main objective of this work is to generalize the results of finite-dimensional linear spaces to infinite-dimensional linear spaces and to obtain new results linking the two topics of functional analysis and measurement theory, although they are somewhat independent from each other. This work can be divided into several stages, including:

1. Defining the measurable function with values in the ordered Banach space, proving the equivalent expressions for this definition and studying some of its properties, and proving that the set of measurable functions with values in the ordered Banach space is a linear space.
2. Defining the convergence of functions with values in the ordered Banach space, therefore we defined; the convergence pointwise, the pointwise Cauchy sequence, the uniform convergence and the uniform Cauchy sequence. The convergence of the measurable functions with values in the ordered Banach space was also defined. The types of these convergences are: Convergence almost everywhere, convergence Cauchy almost everywhere, convergence almost uniform, Cauchy almost uniform convergence, convergence in measure and Cauchy convergence in measure. Besides, some of their properties, theorems related to them and the relationship between them have been mentioned.
3. Generalizing of the concept of integration using the measure space $(\Omega, \Gamma, \mathcal{M})$ and the measurable function $\theta: \Omega \longrightarrow \mathcal{W}$ where $\mathcal{W}$ is the space of an ordered Banach algebra, using the integral of a simple measurable function with values in an ordered Banach algebra space (after being represented by an indicator function that has values in an ordered Banach algebra space) and the integral of a non-negative measurable function that has values in an ordered Banach algebra space.

4. Discussing the Radon-Nikodym theorem, which represents one of the basic applications of the integration theory, as well as a basic theorem in modern probability theory as it leads to the probability density function for a random variable, and it is also important in other parts of the analysis, and in mathematics as well, as it is considered a result in measurement theory and expresses the relationship between two measures defined on the same measurement space.
5. Generalizing the Radon-Nikodym theorem in ordered Banach algebra space using the development of Hahn's Decomposition theorem.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

أنواع جديدة من دوال مجموعة قيم جبر بناخ

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات / البحتة

من قبل
وفاء يونس يحيى الطائي

بإشراف
أ.د. نوري فرحان المياحي

١٤٤٤ هـ ٢٠٢٢ م

الخلاصة

الهدف الاساسي من هذا العمل هو تعميم نتائج فضاءات خطية منتهية البعد الى فضاءات خطية غير منتهية البعد، والحصول على نتائج جديدة تربط بين موضوعي التحليل الدالي ونظرية القياس، بالرغم من انهما موضوعان مستقلان عن بعضهما نوعا ما. يمكن تقسيم هذا العمل الى عدة مراحل:

١. تعريف الدالة القابلة للقياس ذات قيم في فضاء بناخ المرتب، وبرهنة العبارات المكافئة لهذا التعريف ودراسة بعض خصائصه، وبرهنة ان مجموعة الدوال القابلة للقياس ذات قيم في فضاء بناخ المرتب هي تمثل فضاء خطي.

٢. تعريف تقارب الدوال ذات قيم في فضاء بناخ المرتب، حيث تم تعريف التقارب النقطي، وتقارب متتابعة كوشي النقطي، والتقارب المنتظم، وتقارب متتابعة كوشي المنتظم، كما عرفنا تقارب الدوال القابلة للقياس ذات قيم في فضاء بناخ المرتب، ومن أنواع هذه التقاربات هي التقارب في كل مكان تقريبا، وتقارب كوشي في كل مكان تقريبا، والتقارب المنتظم تقريبا، وتقارب كوشي المنتظم تقريبا، والتقارب بالقياس، وتقارب كوشي بالقياس، مع ذكر بعض خصائصهم وبعض المبرهنات المتعلقة بهم، والعلاقة بينهم.

٣. تعميم مفهوم التكامل باستخدام فضاء القياس $(\Omega, \Gamma, \mathcal{M})$ والدالة القابلة للقياس $\theta: \Omega \longrightarrow \mathcal{W}$ حيث $\mathcal{W}$ هو فضاء جبر بناخ المرتب، مستعينين بتكامل الدالة البسيطة القابلة للقياس ذات قيم في فضاء جبر بناخ المرتب (بعد تمثيلها بواسطة دالة المؤشر ذات قيم في فضاء جبر بناخ المرتب) وتكامل الدالة غير السالبة القابلة للقياس ذات قيم في فضاء جبر بناخ المرتب.

٤. مناقشة مبرهنة رادون- نيكوديم والتي تمثل أحد التطبيقات الأساسية لنظرية التكامل، فضلا على انها مبرهنة أساسية في نظرية الاحتمال الحديث حيث أنها تؤدي إلى دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي، وهي ايضا مهمة في أجزاء أخرى من التحليل، وكذلك فان هذه المبرهنة لها أهمية في الرياضيات، حيث انها تعتبر نتيجة في نظرية القياس فهي تعبرعن العلاقة بين مقياسين معرفين على نفس فضاء القياس.

٥. تعميم مبرهنة رادون- نيكوديم في فضاء جبر بناخ المرتب مستعينين بتطوير مبرهنة تجزئة جوردان.