Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Chaotic Behavior of Continuous Dynamical Systems Using Metaheuristic Algorithms

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/ Computational Mathematics**

By

Karam Adel Abed Mohammed

Supervised by

A.D. Omar Saber Qasim Yahya **A.D. Saad Fawzi Jasim Saied**

2025 A.D. **1447 A.H.**

Abstract

Chaotic systems are among the most prominent nonlinear models that exhibit extreme sensitivity to initial conditions, making their study an effective tool for understanding complex phenomena across various scientific fields. This dissertation aims to extend the well-known three-dimensional chaotic Liu system by adding two additional dimensions, resulting in the development of two hyperchaotic models: a four-dimensional and a five-dimensional system. The focus is placed on enhancing chaotic behavior and analyzing the impact of this dimensional extension on the system's dynamical properties, particularly in terms of increasing stability and complexity. Two distinct approaches were adopted for parameter selection: the first based on random initialization, and the second utilizing intelligent selection through metaheuristic optimization algorithms. In the random approach, initial parameter values were generated within arbitrary ranges, and the resulting models were analyzed using chaos analysis tools such as Lyapunov Exponents. The findings from both proposed models indicated that this method produced significant chaotic behavior in terms of dynamical complexity and structure. In the intelligent approach, two computational intelligence algorithms were employed: Particle Swarm Optimization (PSO) and the Walrus Optimizer Algorithm (WaOA). These algorithms were used to identify optimal parameter sets across different system behaviors, aiming to intensify hyperchaotic dynamics and systematically increase the system's positive Lyapunov exponent, indicating greater dynamical complexity. The application of these algorithms led to the discovery of parameter sets that produced the highest possible levels of chaos in the extended systems. The results demonstrated that the models generated through intelligent algorithms achieved high levels of hyperchaotic efficiency, characterized by enhanced sensitivity to initial conditions and improved dynamical properties. Moreover, these algorithms exhibited a remarkable capability to explore wide parameter spaces and identify optimal values with high efficiency, thereby surpassing the performance of conventional random-based approaches. The adoption of intelligent algorithms thus represents not only an effective tool for parameter selection but also a robust and advanced methodology for generating and analyzing high-dimensional chaotic models with complex nonlinear structures. Notably, the PSO and WaOA algorithms showed clear superiority over all other random methods by delivering more accurate and stable solutions within record times, where the execution duration in most cases did not exceed a few minutes and, in some instances, was reduced to only a few seconds. In particular, the PSO algorithm demonstrated exceptional superiority compared to other complex algorithms, successfully combining speed and accuracy, which positively impacted the studied chaotic systems by enhancing their properties and enriching their dynamical behavior.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

سلوك الأنظمة الديناميكية الفوضوية المستمرة باستخدام الخوارزميات فوق الحدسية

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

كرم عادل عبد محمد

بإشراف

أ.د.عمر صابر قاسم يحيى أ.د. سعد فوزي جاسم سعيد

2025 م 1447 هـ

المستخلص

تُعد الأنظمة الفوضوية من أبرز النماذج غير الخطية التي تُظهر سلوكًا حساسًا للشروط الابتدائية، مما يجعل دراستها أداة فعالة لفهم الظواهر المعقدة في العديد من المجالات العلمية. تهدف هذه الأطروحة إلى النموذج الفوضوي المعروف باسم نظام ليو ثلاثي الأبعاد 3-D ليشمل إضافة بُعدين، مما أدى إلى تطوير نموذجين وتوسيعهما: الى نظاميين شديدين الفوضى رباعي وخماسي الأبعاد. مع التركيز على تعزيز السلوك الفوضوي وتحليل دراسة تأثير هذا التوسيع في الخصائص الديناميكية للنظام، لا سيما في سياق تعزيز السلوك الفوضوي وتحسين استقراره وثرائه. وقد جرى اعتماد نهجين مختلفين لاختيار معلمات النظام الأول الاختيار العشوائي والثاني الاختيار الذكي القائم على خوارزميات التحسين ما فوق الحدسية metaheuristic. في الطريقة العشوائية، تم توليد القيم الأولية للمعلمات ضمن نطاقات عشوائية، ثم دراسة الأنظمة الناتجة باستخدام أدوات تحليل الفوضى (Lyapunov Exponents). وقد أظهرت النتائج في النموذجين المقترحين أن هذا النهج يُنتج سلوكًا فوضويًا ملحوظًا من حيث التعقيد والخصائص الديناميكية. أما في الطريقة الذكائية، فقد تم توظيف خوارزميتين تستند إلى الذكاء الحسابي: خوارزمية سرب الجسيمات (Particle Swarm Optimization - PSO)، وخوارزمية Walrus Optimizer Algorithm (WaOA). بهدف تحديد مجموعة المعلمات المثلى وبحالات مختلفة لسلوك النظام والتي تؤدي إلى تعزيز الفوضى المفرطة وزيادة قيمة اسية ليابونوف الموجبة في النظام بشكل منهجي وفعّال ما يدل على تعقيد ديناميكي أكبر، وأدى استخدام هذه الخوارزميات الى ايجاد المعلمات المثلى والتي تحقق أقصى درجات الفوضى الممكنة للنظام الموسع. أن الأنظمة التي تم توليدها عبر الخوارزميات الذكائية تتمتع بمستوى عالٍ من الكفاءة شديدة الفوضى، من حيث الخصائص الديناميكية وزيادة الحساسية للشروط الابتدائيةأظهرت النتائج أن النماذج المُولَّدة من خلال الخوارزميات الذكية قد حققت مستويات عالية من كفاءة الفوضى المفرطة، تميزت بزيادة الحساسية لشروط البدء وتحسين الخصائص الديناميكية. علاوة على ذلك، أظهرت هذه الخوارزميات قدرة ملحوظة على استكشاف فضاءات واسعة من المعاملات وتحديد القيم المثلى بكفاءة عالية، متجاوزةً بذلك أداء الأساليب التقليدية المعتمدة على العشوائية. ومن ثَمَّ، فإن اعتماد الخوارزميات الذكية لا يُمثّل أداة فعّالة لاختيار المعاملات فحسب، بل يشكل أيضًا منهجية متقدمة وموثوقة لتوليد النماذج الفوضوية عالية الأبعاد ذات البُنى غير الخطية المعقدة وتحليلها. ومن الجدير بالذكر أن خوارزميتي (PSO and WaOA) قد أظهرتا تفوقًا واضحًا على جميع الأساليب العشوائية الأخرى من خلال توفير حلول أكثر دقة واستقرارًا في أزمنة قياسية، حيث لم يتجاوز زمن التنفيذ في معظم الحالات بضع دقائق، وفي بعض الأحيان انخفض إلى ثوانٍ معدودة فقط. وعلى وجه الخصوص، أظهرت خوارزمية (PSO) تفوقًا استثنائيًا مقارنة بالخوارزميات المعقدة الأخرى، إذ جمعت بنجاح بين السرعة والدقة، مما انعكس إيجابيًا على النظم الفوضوية المدروسة من خلال تعزيز خصائصها وإغناء سلوكها الديناميكي.