جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات

المجاميع المفتوحة من النمط- ii في الفضاءات التبولوجية

بيداء سهيل عبدالله حسن

أطروحة دكتوراه
الرياضيات / البحتة

بإشراف
أ. د. عامر عبد الإله محمد

1441 هـ   2020م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءٗ وَٱلۡقَمَرَ
نُورٗا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ
ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ
ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ يُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ
يَعۡلَمُونَ ﴾

[يونس: الآية 5]

إقرار المشرف

أشهد ان إعداد هذه الأطروحة الموسومة بـ " **المجاميع المفتوحة من النمط- *ii* في الفضاءات التبولوجية**" قد جرى تحت إشرافي في جامعة الموصل / كلية علوم الحاسوب والرياضيات وهي جزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في الرياضيات / البحتة.

التوقيع:
الاسم: أ. د. عامر عبد الإله محمد
التاريخ:

إقرار المقوم اللغوي

أشهد ان إعداد هذه الأطروحة الموسومة بـ " **المجاميع المفتوحة من النمط- *ii* في الفضاءات التبولوجية**" قد تمت مراجعتها من الناحية اللغوية وتصحيح ما ورد فيها من أخطاء لغوية وتعبيرية وبذلك أصبحت الأطروحة مؤهلة للمناقشة بقدر تعلق الأمر بسلامة الأسلوب وصحة التعبير.

التوقيع:
الاسم: م. رنا طلال سليمان
التاريخ:

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على التوصيات التي تقدم بها المشرف والمقوم اللغوي أرشح هذه الأطروحة للمناقشة.

التوقيع:
الاسم: أ. د. رائدة داؤد محمود
التاريخ:

إقرار رئيس قسم الرياضيات

بناءً على التوصيات التي تقدم بها المشرف والمقوم اللغوي ورئيس لجنة الدراسات العليا، أرشح هذه الاطروحة للمناقشة.

التوقيع:
الاسم: أ. م. د. وليد محمد فتحي الحياني
التاريخ:

الإهداء

إلى : فيض العلم ونبعه معلمنا محمد (صلى الله عليه وسلم)

وإلى :كل من استمع الى هديه واقتدى بسنته

وإلى استاذي وقدوتي الاستاذ الدكتور عامر عبد الإله

أهدي هذا الجهد المتواضع

شكر وعرفان

الحمد لله كما ينبغي لجلال وجهه وعظيم سلطانه وحده ، إقراراً واعترافاً بأفضاله ونعمه التي لا تعد ولا تحصى، أحمده حتى يرضى واشكره دائما وأبدا ، فلولاه ما كان لهذا العمل أن يبلغ منتهاه، بما يرتجيه من خدمة الدين وإصلاح المجتمع ﴿ قُلْ إِنَّ صَلَاتِي وَنُسُكِي وَمَحْيَايَ وَمَمَاتِي لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ ﴿١٦٢﴾ ﴾ سورة الأنعام ، الآية (162).

وفي البداية يطيب لي أن أتقدم بالشكر العميق إلى مشرفي وأستاذي الفاضل **الاستاذ الدكتور (عامر عبد الإله)** لتوليه الاشراف على أطروحتي، ولجهوده الكبيرة القيمة المخلصة في تطوير هذه الدراسة وإخراجها بهذه الصورة، فما ادخر أي جهد في سبيل توجيهي حتى الانتهاء من كتابتها، وفضله قديم عليَّ إذ هو أول من شجعني على المضي نحو الدراسات العليا.

ويسرني أن أتقدم بالامتنان الوافر إلى رئيس قسم الرياضيات المحترم الدكتور **(وليد محمد فتحي)** وأساتذتي الأفاضل؛ لما لمسته من تعاون وحب المساعدة، وكان لدعمهم لي وتشجيعهم أثر بالغ في نفسي، فعبروا بذلك عن مدى أصالتهم وجوهرهم النفيس وخلقهم الرفيع جزاهم الله كل الخير.

وأخيرا أتقدم بالشكر والعرفان إلى زوجي العزيز ووالدتي وعائلتي الذين تحملوا معي مشاق إكمال هذا العمل ولكل النفوس الطيبة والمتعاونة التي مدت يد المساعدة قولا وفعلا أو أعانت بنصيحة من قلب صادق ومحب، ولاسيما زملائي في كلية العلوم للحاسوب والرياضيات وكلية التربية للعلوم الصرفة الذين أشعروني أن الدنيا بخير وإنها لا تخلوا من الطيبين الصالحين. جزاهم الله كل الخير.

ولله الحمد في الأولى والآخرة

الباحثة

قائمة المحتويات

المستخلص

إن تعميم مفهوم المجموعة المفتوحة في الفضاء التبولوجي يؤدي إلى ظهور مفاهيم جديدة تحسن مفاهيم التبولوجيا العامة بكل جوانبها. في بداية الستينات من القرن الماضي ليفيني أعطى مفهوم المجموعة شبه المفتوحة ليفتح بذلك طرق للباحثين لتحسين مفاهيم التبولوجيا العامة ومن أهم أنماط المجاميع المفتوحة في تلك الفترة هي المجموعة المفتوحة من النمط$-\alpha$ ولها خاصية مميزة عن باقي الأنماط وهو أن عائلة تلك المجاميع تعود لتمثل فضاء تبولوجي ، كذلك المجموعة التي قمنا بتعريفها تمثل فضاء تبولوجي والتي تنص: يقال للمجموعة A في الفضاء التبولوجي (X,τ) أنها مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$ إذ وجدت مجموعة مفتوحة $(G \neq \emptyset, X)$ بحيث أن $A \subseteq Cl\,(A \cap G)$ و $Int\,(A) = G$.

وتناولنا دراسة عدد من الصفات والخصائص لهذا الصنف من المجاميع، كذلك درسنا علاقة المجاميع المفتوحة من النمط$-ii$ بالمجاميع المفتوحة، المجاميع المفتوحة من النمط$-\alpha$، والمجاميع المفتوحة من النمط$-i$ ، والمجاميع المفتوحة من النمط$-\delta$ ، والمجاميع المفتوحة من النمط$-\theta$ على التوالي. كما عرفنا الغاية والداخل والانغلاق والجبهة من النمط$-ii$. كذلك، قدمنا فكرة التطبيق المستمر من النمط$-ii$ ، والتطبيق المفتوح من النمط$-ii$ ، والتشاكل من النمط$-ii$، مع تحقيق عدد من خصائص تلك التطبيقات. فضلاً عن ذلك قدمنا عدد من بديهيات الفصل من النمط$-ii$ وخصوصاً فضاء$-T_{0ii}$ وفضاء$-T_{1ii}$، وعلاقتها مع بديهيات الفصل $T_0, T_{0i}, T_1, T_{1i}, T_{1\alpha}$. وأخيراً درسنا المجاميع المفتوحة من النمط$-ii$ في الفضاء التبولوجي الثنائي.

قائمة المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة الأنكليزية	الرمز	الاسم باللغة العربية
Topological space	(X,τ)	الفضاء التبولوجي
	Open− set	المجموعة المفتوحة
	Semi−open set	المجموعة شبه المفتوحة
	α−open set	المجموعة المفتوحة من النمط− α
	i−open set	المجموعة المفتوحة من النمط− i
	ii−open set	المجموعة المفتوحة من النمط− ii
	Int−open set	المجموعة المفتوحة من النمط− Int
	θ −open set	المجموعة المفتوحة من النمط− θ
	δ −open set	المجموعة المفتوحة من النمط− δ
The family of all open sets	τ	عائلة المجاميع المفتوحة
The family of all semi-open sets	τ^S	عائلة المجاميع شبه المفتوحة
The family of all i-open sets	τ^i	عائلة المجاميع المفتوحة من النمط− i
The family of all α-open sets	τ^α	عائلة المجاميع المفتوحة من النمط− α
The family of all Int-open sets	τ^{Int}	عائلة المجاميع المفتوحة من النمط− Int
The family of all ii-open sets	τ^{ii}	عائلة المجاميع المفتوحة من النمط− ii
Closed sets	$C(\tau)$	المجاميع المغلقة
i- closed sets	$C\ (\tau^i)$	المجاميع المغلقة من النمط- i
ii- closed sets	$C\ (\tau^{ii})$	المجاميع المغلقة من النمط- ii
α- closed sets	$C\ (\tau^\alpha)$	المجاميع المغلقة من النمط− α
Int- closed sets	$C\ (\tau^{Int})$	المجاميع المغلقة من النمط- Int
Limit point of A	$D\ (A)$	مشتقة المجموعة A

الاسم باللغة العربية	الرمز	المصطلح باللغة الأنكليزية
مشتقة من النمط− ii للمجموعة A	$D_{ii}\ (A)$	ii-limit point of A
داخل المجموعة A	$Int\ (A)$	Interior of a set A
داخل المجموعة A من النمط− i	$Int_i\ (A)$	i- interior of a set A
داخل المجموعة A من النمط− ii	$Int_{ii}\ (A)$	ii- interior of a set A
داخل المجموعة A من النمط− α	$Int_\alpha\ (A)$	α- interior of a set A
داخل المجموعة A من النمط− θ	$Int_\theta(A)$	θ- interior of a set A
داخل المجموعة A من النمط− δ	$Int_\delta(A)$	δ- interior of a set A
انغلاق المجموعة A	$Cl\ (A)$	Closure of a set A
انغلاق المجموعة A من النمط−i	$Cl_i(A)$	i- closure of a set A
انغلاق المجموعة A من النمط−ii	$Cl_{ii}(A)$	ii- closure of a set A
انغلاق المجموعة A من النمط−α	$Cl_\alpha(A)$	α- closure of a set A
انغلاق المجموعة A من النمط−θ	$Cl_\theta(A)$	θ - closure of a set A
انغلاق المجموعة A من النمط−δ	$Cl_\delta(A)$	δ - closure of a set A
جبهة المجموعة A	$b\ (A)$	border of a set A
جبهة المجموعة A من النمط−ii	$b_{ii}\ (A)$	ii-border of a set A
حدود المجموعة A	$Fr\ (A)$	Frontier of a set A
حدود المجموعة A من النمط−ii	$Fr_{ii}\ (A)$	ii-Frontier of a set A
عائلة المجاميع المفتوحة من النمط−δ	$\delta o(X)$	The family of all $\delta - open\ set$
عائلة المجاميع المفتوحة من النمط−θ	$\theta o(X)$	The family of all $\theta - open\ set$
عائلة المجاميع المفتوحة المنتظمة	$Ro(X)$	The family of all $R - open\ set$
متممة المجموعة A	$X \setminus A$	The complement of A
الفضاء التبولوجي الثنائي	(X, τ_1, τ_2)	bitopology space

المصطلح باللغة الأنكليزية	الرمز	الاسم باللغة العربية
Open set in bitopological space	$\tau_1 \tau_2 - open\ set$	المجموعة المفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)
i-open set in bitopological space	$\tau_1\ \tau_2 - i -$ open set	المجموعة المفتوحة من النمط i- في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)
ii-open set in bitopological space	$\tau_1\ \tau_2 - ii -$ open set	المجموعة المفتوحة من النمط ii- في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)
α-open set in bitopological space	$\tau_1\ \tau_2 - \alpha -$ open set	المجموعة المفتوحة من النمط α- في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)
Topological homeomorphism	Home	التشاكل التبولوجي
Topological *i*-homeomorphism	*i*-home	التشاكل التبولوجي من النمط i-
Topological *ii*-homeomorphism	*ii*-home	التشاكل التبولوجي من النمط ii-
Topological α-homeomorphism	α-home	التشاكل التبولوجي من النمط α-
Topological *Int*-homeomorphism	*Int*-home	التشاكل التبولوجي من النمط *Int*-
Topological space for *i*-open sets	(X, τ^i)	الفضاء التبولوجي للمجاميع المفتوحة من النمط i-
Topological space for *ii*-open sets	(X, τ^{ii})	الفضاء التبولوجي للمجاميع المفتوحة من النمط ii-
Topological space for α-open sets	(X, τ^{α})	الفضاء التبولوجي للمجاميع المفتوحة من النمط α-
iw-closed set	$iwc(x, \tau)$	مجموعة مغلقة من النمط *iw*-

المصطلح باللغة الأنكليزية	الرمز	الاسم باللغة العربية
iiw-closed set	$\mathrm{iiwc}(\mathrm{x}, \tau)$	مجموعة مغلقة من النمط iiw-
αw-closed set	$\alpha wc(x, \tau)$	مجموعة مغلقة من النمط αw-
End of proof	■	نهاية البرهان

المقدمة

Introduction

المقدمة Introduction

التبولوجيا من النظريات (التركيبات) الحديثة في الرياضيات التي نشأت في القرن التاسع عشر وتبلورت خلال القرن العشرين. رغم أن جذوره تمتد في الهندسة والتحليل الرياضي إلا أنه بنموه استقل عنهما وأصبح الآن أداة تخدم كل الرياضيات [15]. وقد نمت التبولوجيا من نواحي هندسية كما في التبولوجيا التجميعية (التوافقية) Combinatorial على أيدي أويلر و أوغست فيرديناند وتبلور على يد هنري بوانكاريه . ونمى من التحليل الرياضي وامتداداً لنظرية الفئات كما في التبولوجيا التحليلية (العامة)، ومن ثم فإن نموه اتبع خطين، أحداهما المجالات التي ينظر فيها إلى الفراغات التبولوجية على أنها تكونات هندسية معممة ويكون التركيز فيها على تركيب الفراغات نفسها، ومن هذه المجالات التي استحدثت الهومولجيا (التوبولوجيا الجبرية) على ايدي أيلبنرج وستنيرود (1930). أما الخط الثاني ففي التحليل الرياضي حيث ينظر إلى الفراغات التبولوجيا حاملة للدوال المستمرة، حيث تحتل الدوال المستمرة أهمية كبرى فيها، ومن هذه المجالات نظرية باناخ، وفضاءات هلبرت وجبريات باناخ والنظرية الحديثة للتكاملة ونظرية القياس والتحليل التوافقي الحديث والتحليل الدالي.

ليفيني عام 1963 [14] أول من عرّف مفهوم المجموعة شبه المفتوحة (semi-open set) ثم نجاستاد عام 1965 [16] عرّف المجموعة المفتوحة من النمط$-\alpha$ $(\alpha-\text{open set})$ وتُعد المجموعتان من أنماط المجاميع المفتوحة المهمة التي أدت الى تطوير العديد من النظريات والنتائج الأساسية في التبولوجيا العامة. ولاسيما عندما استطاع ديف عام 2001 [18] أن يثبت أن (كل $\tau \subset \tau^{\alpha}$) و τ^{α} دائما تمثل تبولوجيا على X إذ إن τ^{α} تمثل عائلة المجاميع المفتوحة من النمط $-\alpha$ في الفضاء التبولوجي (X, τ).

وفي عام 2012 قدم عامر وصبيح [30] تعريف المجموعة المفتوحة من النمط $i-$ $(i-open\ set)$ ودرس العلاقة بين هذه المجموعة والمجموعة المفتوحة، المجموعة شبه المفتوحة، المجموعة المفتوحة من النمط $\alpha -$. كما درس الغاية والداخل والانغلاق من النمط $i-$ للمجموعة من الفضاءات الموسعة تبولوجيا للمجاميع المفتوحة من النمط $i-$ بينما قام أسكندر بدراسة التطبيقات المستمرة من النمط $i-$ $(i-continuous\ mapping)$ [30] و التطبيقات المفتوحة من النمط $i-$ $(i-open\ mapping)$ [30] والتشاكلات من النمط $i-$ $(i-homeomorphisms\ mapping)$ [30]. اسكندر من خلال دراسته للمجاميع المفتوحة من النمط $i-$ استطاع ان يستنتج ان (كل $\tau \subset \tau^i$) و τ^i لا تمثل تبولوجيا على X بشكل عام، إذ إن τ^i ترمز الى عائلة كل المجاميع المفتوحة من النمط–i في الفضاء التبولوجي $(X\ ,\tau)$.

إن هذا الاستنتاج الذي توصل اليه صبيح دفعنا الى الاستمرار في دراسة المجاميع المفتوحة من النمط $i-$، خصائصها وتطبيقاتها وعلاقتها بانماط المجاميع المفتوحة الاخرى الى ان توصلنا الى تقديم نمط جديد من المجاميع المفتوحة وهي المجموعة المفتوحة من النمط – ii $(ii-open\ set)$ إذ إن هذه المجاميع لها الخاصية بأنها $(X\ ,\tau^{ii})$ تمثل فضاءً تبولوجيا إذ انها τ^{ii} ترمز الى عائلة كل المجاميع المفتوحة من النمط– ii.

اشتملت هذه الأطروحة على خمسة فصول كالأتي:

في البند الاول من الفصل الأول حددنا اهداف الاطروحة اما في البند الثاني تم تعريف أنماط عدة من المجاميع المفتوحة وهي: المجاميع شبه المفتوحة، المجاميع المفتوحة من النمط $\theta -$، المجاميع المفتوحة من النمط $\delta -$، المجاميع المفتوحة من النمط $\alpha -$،

والمجاميع المفتوحة من النمط $-i$ كما تم دراسة العلاقة بين هذه الانماط من خلال الامثلة.اما البند الثالث فقد تضمن عدد من التطبيقات التبولوجية والتشاكلات في الفضاء التبولوجي لعدد من انماط المجاميع المفتوحة الرئيسة التي تم دراستها في البند الثاني.

قدمنا في الفصل الثاني وفي بنده الاول نوعا جديدا من المجاميع المفتوحة والتي تدعى المجاميع المفتوحة من النمط $-ii$ $(ii-open\ set)$ والمجاميع المفتوحة من النمط $-Int$ $(Int-$ open set). واوضحنا العلاقة بين المجاميع المفتوحة من النمط $-ii$ والمجاميع المفتوحة (open set) ، والمجاميع المفتوحة من النمط $-i$ (i-open set) [30] والمجاميع المفتوحة من النمط $-\alpha$ (α-open set)، [2] والمجموعة المفتوحة من النمط $-\theta$ $(\theta-open\ set)$ [5]، والمجاميع المفتوحة من النمط $-\delta$ $(\delta-open\ set)$ [6] على التوالي، فضلا عن ذلك قُمنا بدراسة العلاقة بين المجاميع المغلقة من النمط $-ii$ $(ii-closed\ sets)$ والمجاميع المغلقة (closed sets)، والمجاميع المغلقة من النمط $-i$ $(i-closed\ sets)$ والمجاميع المغلقة من النمط $-\alpha$ $(\alpha-closed\ sets)$ على التوالي.

ومن أهم الملاحظات والمبرهنات في هذا البند التي حصلنا عليها:

ملاحظة: كل مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $-i$، والعكس غير صحيح.

ملاحظة: كل مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $-Int$، والعكس غير صحيح.

مبرهنة: كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي هي مفتوحة من النمط $-ii$، والعكس غير صحيح.

مبرهنة: كل مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$، والعكس غير صحيح.

مبرهنة: اذا كانت τ تبولوجيا على X فان τ^{ii} أيضا تكون تبولوجيا على X.

في البند الثاني من الفصل الثاني تم تعريف نقاط الغاية من النمط $- ii$ للمجموعة في الفضاء التبولوجي (X , τ)، فضلاً عن ذلك قمنا بدراسة عدد من الخصائص نقاط الغاية من النمط $- ii$. كذلك تم تعريف الداخل والانغلاق من النمط $- ii$ للمجموعة ودراسة بعض خصائص الداخل والانغلاق من النمط $- ii$ للمجموعة. تم تعريف جبهة وحدود المجموعة من النمط $- ii$ في الفضاء التبولوجي واعطاء بعض خصائص جبهة وحدود من النمط $- ii$ للمجموعة. واخيرا تم تعريف خارج المجموعة من النمط $- ii$ ودراسة بعض خصائصها.

أهم مبرهنات التي حصلنا عليها في هذا البند:

مبرهنة: ليكن (X, τ^{ii}) فضاء تبولوجي. وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X.

عندئذ العبارات الآتية صحيحة:

1. $D_{ii}(A) \subseteq D(A)$ اذ ان $D(A)$ تمثل مشتقة المجموعة A.
2. اذا كانت $A \subseteq B$ فان $D_{ii}(A) \subseteq D_{ii}(B)$
3. $D_{ii}(A \cap B) \subset D_{ii}(A) \cap D_{ii}(B)$ و $D_{ii}(A) \cup D_{ii}(B) \subset D_{ii}(A \cup B)$.
4. $D_{ii}(D_{ii}(A) \setminus A) \subset D_{ii}(A)$
5. $D_{ii}(A \cup D_{ii}(A)) \subset A \cup D_{ii}(A)$

مبرهنة: ليكن (X, τ^{ii}) فضاء تبولوجي. وليكن A,B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X.

عندئذٍ العبارات الاتية صحيحة:

1. $Int_{ii}(A)$ هو اتحاد المجاميع المفتوحة من النمط $- ii$ الجزئية من A.
2. $A = Int_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كان A مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$.
3. $Int_{ii}(Int_{ii}(A)) = Int_{ii}(A)$
4. $Int_{ii}(A) = A \setminus D_{ii}(X \setminus A)$
5. $X \setminus Int_{ii}(A) = CL_{ii}(X \setminus A)$

6. $X \setminus CL_{ii}(A) = Int_{ii}(X \setminus A)$

7. اذا كانت $A \subseteq B$ فان $Int_{ii}(A) \subseteq Int_{ii}(B)$

8. $Int_{ii}(A) \cup Int_{ii}(B) \subseteq Int_{ii}(A \cup B)$

9. $Int_{ii}(A) \cap Int_{ii}(B) \supseteq Int_{ii}(A \cap B)$

مبرهنة : ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجي وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X.

عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة :

1. $CL_{ii}(A) = A \cup D_{ii}(A)$

2. $A \subseteq CL_{ii}(A)$

3. اذا كانت B مجموعة مغلقة من النمط— ii تحتوي على A، فان $CL_{ii}(A) \subseteq B$

4. اذا كانت $A \subseteq B$ ، فان $CL_{ii}(A) \subseteq CL_{ii}(B)$

5. $CL_{ii}(A) \cup CL_{ii}(B) \subseteq CL_{ii}(A \cup B)$

6. $CL_{ii}(A \cap B).\subseteq CL_{ii}(A) \cap CL_{ii}(B)$

7. $CL_{ii}(A) = CL_{ii}(CL_{ii}(A))$

8. $A = CL_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كانت A مجموعة مغلقة من النمط– ii

مبرهنة: ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن $x \in X$. فان $x \in CL_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كان

$G \cap A \neq \emptyset$ لكل مجموعة G مفتوحة من النمط– ii تحتوي على x

مبرهنة: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، فإن

$$X\backslash Int_{ii}(A) = Cl_{ii}\ (X\backslash A)$$

في البند الأول من الفصل الثالث عرّفنا أصنافا جديدة من التطبيقات أطلقنا عليها اسم الاستمرارية من النمط $ii -$ $(ii - continuous)$ والتطبيق المفتوح من النمط $ii -$ $(ii - open)$ والتشاكل التبولوجي من النمط $ii -$ $(ii - homeomorphism)$ وقمنا بتوضيح العلاقة بين الاستمرارية من النمط $ii -$ والاستمرارية (continuity) والاستمرارية من النمط $i -$ $(i - continuous)$ [30] والاستمرارية من النمط $\alpha -$ $(\alpha - \text{continuous})$ [4]. كذلك بين التشاكل التبولوجي من النمط $ii -$ $(ii - homeomrphism)$ والتشاكل التبولوجي (homeomrphism) والتشاكل التبولوجي من النمط i- $(i - homeomrphism)$ [30] والتشاكل التبولوجي من النمط $\alpha -$ $(\alpha - homeomprphism)$ [18].

ومن أهم النتائج والمبرهنات في هذا البند التي حصلنا عليها:

مبرهنة: اذا كان f تشاكلاً تبولوجياً فان f هو تشاكلاً تبولوجياً من النمط $ii -$، والعكس غير صحيح.

مبرهنة: اذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط $ii -$ فان f هو تشاكلاً تبولوجياً من النمط $i -$، والعكس غير صحيح.

مبرهنة: اذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط $\alpha -$ فان f هو تشاكلاً تبولوجياً من النمط $ii -$، والعكس غير صحيح.

في البند الثاني من الفصل الثالث عرفنا المجموعة المغلقة من النمط $iw -$ وذكرنا عدد من الأمثلة عليها، كذلك عرفنا المجموعة المغلقة من النمط-iiw ودرسنا عدد من خصائصها وصفاتها وعلاقتها بالمجموعة المغلقة من النمط-w [17] والمجموعة المغلقة من النمط- αw [13] والمجموعة المغلقة من النمط $iw -$ معززاً بالأمثلة والمبرهنات.

ومن أهم المبرهنات التي حصلنا عليها في هذا البند هي:

مبرهنة: كل مجموعة مغلقة من النمط− iiw في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط−αw.

مبرهنة: كل مجموعة مغلقة من النمط− iw في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط−iiw.

مبرهنة: ليكن A ، B مجموعتين مغلقتين من النمط−iiw في الفضاء التبولوجي فإن $A \cup B$ هي مجموعة مغلقة من النمط−iiw.

في الفصل الرابع درسنا نوعا جديدا من بديهيات الفصل بوساطة المجاميع المفتوحة من النمط − ii والتي تضمنت بديهيات الفصل الاتية: فضاء− T_{0ii} $(ii - T_o\ space)$ وفضاء− T_{1ii} $(ii - T_1\ space)$ كذلك قمنا بمقارنة الفضاء − T_{0ii} مع الفضاء− T_0 والفضاء− T_{oi} المقدم من قبل صبيح [27] والفضاء− $T_{o\alpha}$ المقدم من قبل فيناكورشي وتكفني [9]. كذلك قارنّا الفضاء− T_{1ii} مع الفضاءات $T_{1\alpha}, T_{1i}, T_1$.

ومن أهم المبرهنات التي حصلنا عليها في هذا الفصل:

مبرهنة: كل فضاء− T_1 هو فضاء − $_{0ii}$.

مبرهنة: كل فضاء− T_1 هو فضاء− T_{1ii}.

مبرهنة: كل فضاء− $T_{1\alpha}$ هو فضاء− T_{1ii}.

مبرهنة: كل فضاء− T_{1ii} هو فضاء− T_{1i}.

في الفصل الخامس قمنا بتعريف المجموعة المفتوحة من النمط−ii في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، ودرسنا صفات هذه المجموعة وعلاقتها مع المجاميع المفتوحة الأخرى المذكورة آنفاً. كذلك درسنا الأستمرارية للتطبيق من النمط−ii في الفضاءات التبولوجية الثنائية وعلاقته مع التطبيقات الأخرى.

ومن أهم المبرهنات التي حصلنا عليها في هذا الفصل:

مبرهنة: كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X, \tau_{1,}\ \tau_2)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $- ii - \tau_2\ \ \tau_1$.

مبرهنة: ليكن $f: (X, \tau_1\ , \tau_2) \to\ (Y,\ \delta_1\ ,\ \delta_2)$ تطبيقاً عندئذٍ:

1. إذا كان f مستمراً فإن f مستمراً من النمط-ii. والعكس غير صحيح.
2. إذا كان f مستمراً من النمط- ii فإن f مستمراً من النمط-i، والعكس غير صحيح.

الفصل الأول

عدد من الأنماط من المجاميع المفتوحة

في الفضاءات التبولوجية

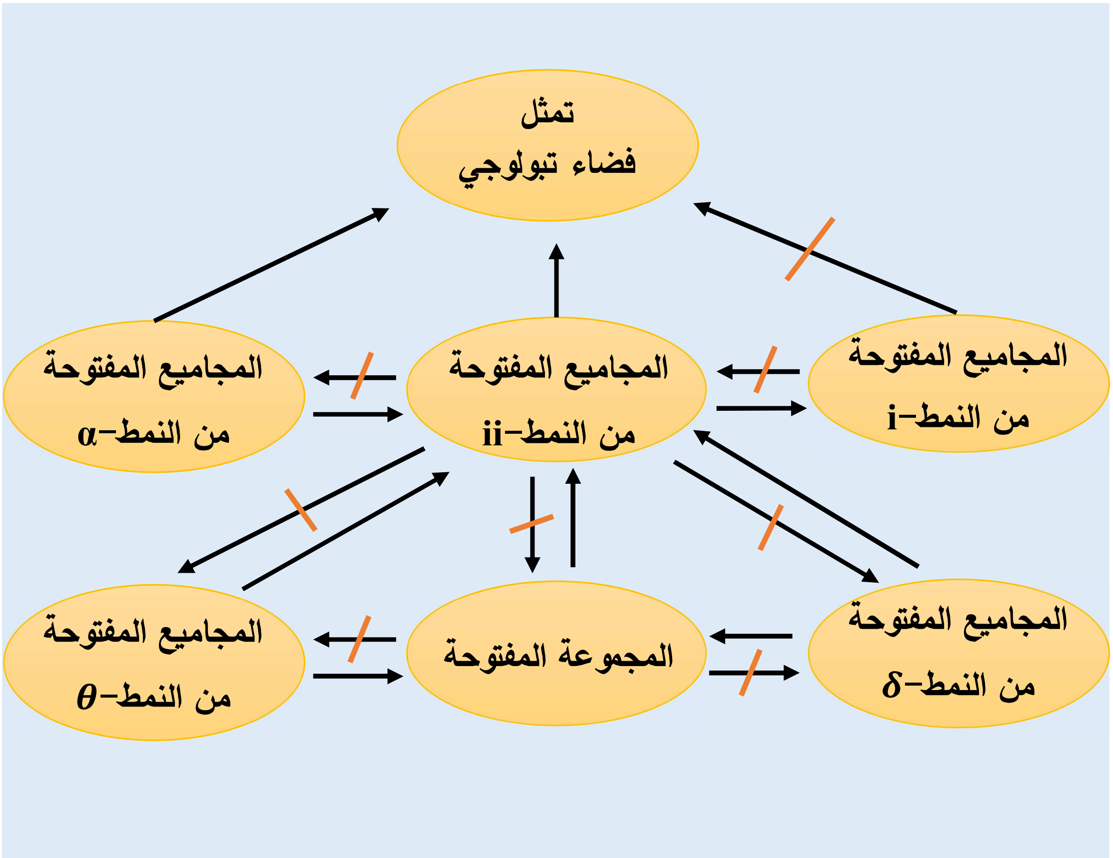
Number of Open Sets of Topological Spaces

في هذا الفصل تم ايضاح هدف الاطروحة مع تعريف المفاهيم والمصطلحات الاساسية والمبرهنات التي نحتاجها في الفصول اللاحقة ، مع تقديم تعريف المجموعة المفتوحة من النمط ii– التي ستكون محور عملنا.

(1-1) : هدف الأطروحة

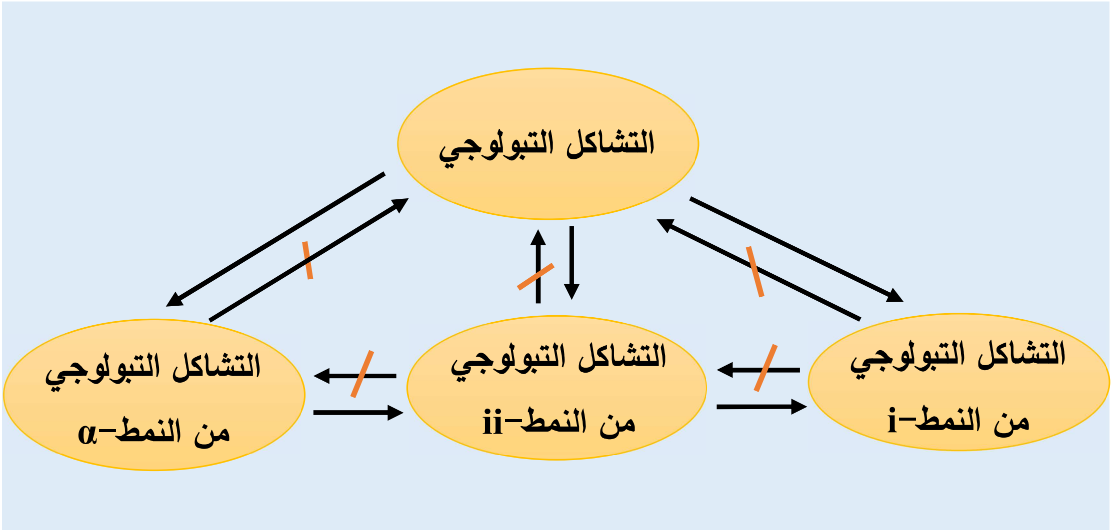
بالإمكان أن نلخص أهداف هذه الأطروحة بالنقاط الآتية:

- تقديم نوع جديد من المجاميع المفتوحة التي تدعى المجاميع المفتوحة من النمط $ii-$ والعلاقة بين هذه المجاميع والمجاميع المفتوحة والمجاميع المفتوحة من النمط $\alpha-$، والمجاميع المفتوحة من النمط $i-$ وتوضيح هل يمكن ان تمثل المجاميع المفتوحة من النمط $ii-$ فضاءً تبولوجيا، كما في المخطط رقم (1)



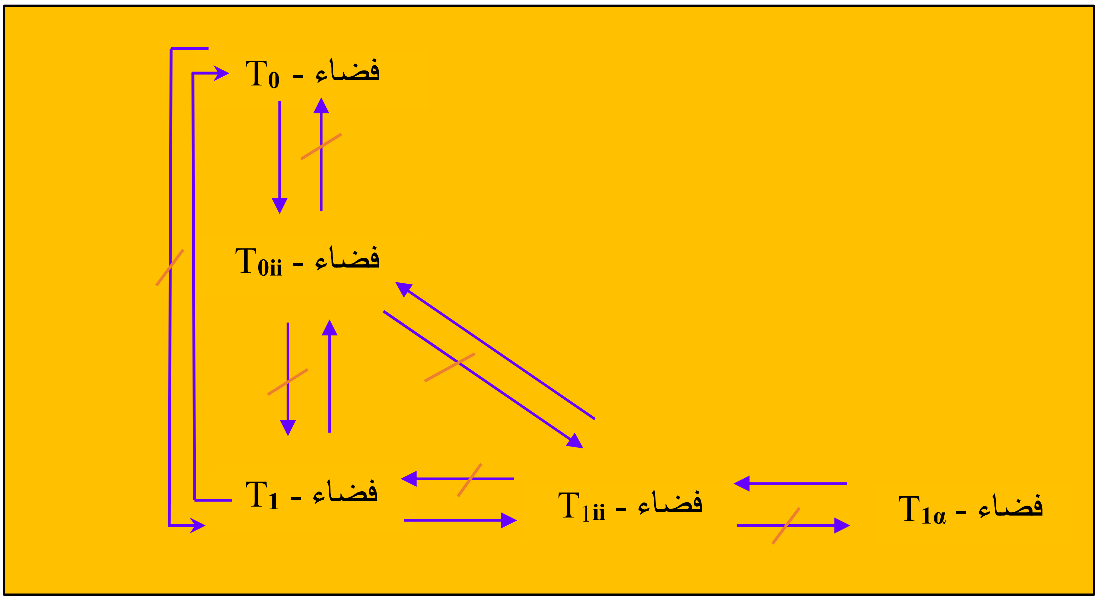
مخطط رقم (1)

- تقديم انواع جديدة من التطبيقات باستعمال المجاميع المفتوحة من النمط $ii-$ ودراسة صفاتها والعلاقة بينها وبين التطبيقات الأخرى، كما في المخطط رقم (2)



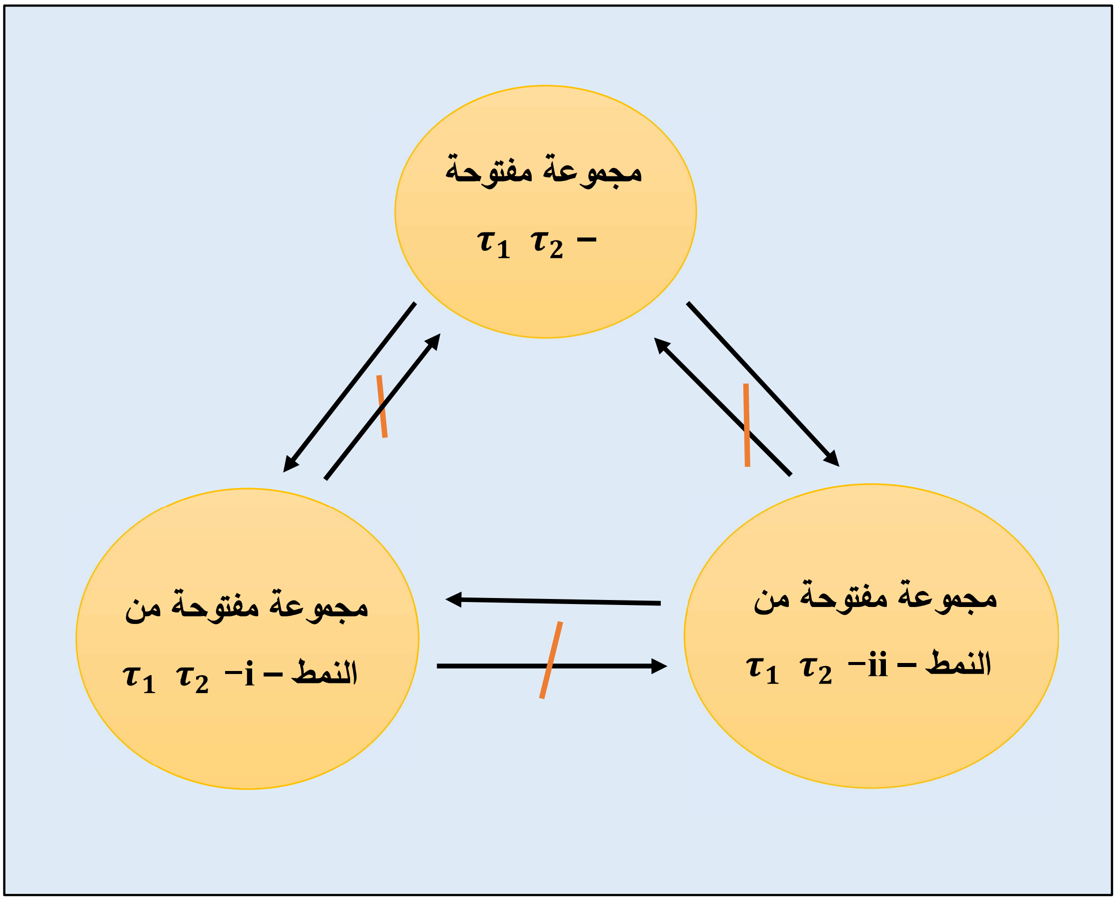
مخطط رقم (2)

- وضع بديهيات فصل باستعمال المجاميع المفتوحة من النمط $ii-$ والعلاقة بينها وبين بديهيات الفصل الاخرى والربط بين بديهيات الفصل من النمط $ii-$ والتطبيقيات من النمط $ii-$، كما في المخطط رقم (3)



مخطط رقم (3)

- دراسة المجاميع المفتوحة من النمط – ii في الفضاء التبولوجي الثنائي وعلاقته مع المجاميع المفتوحة الأخرى في الفضاء التبولوجي الثنائي، كما في المخطط رقم (4) .



مخطط رقم (4)

(1-2): المفاهيم الأساسية (Fundamental Concepts):

سنقدم في هذه الفقرة عدد من المفاهيم والتعاريف الأساسية وكذلك القضايا والمبرهنات الأساسية التي ستساعدنا في إيضاح وبرهان أهداف الأطروحة ونبدأ بالمفاهيم الآتية:

تعريف (1-2-1):

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن $A \subseteq X$ فان:

1. تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوي على A يسمى انغلاق المجموعة A $(clouser\ of\ A)$ [6] أي أن:

$$CL(A) = \cap \{F : A \subseteq F \in C(\tau)\}$$

2. اتحاد كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A يسمى داخل المجموعة A (interior of A) [16] أي أن:

$$Int(A) = \cup \{G : G \in \tau, \quad G \subseteq A\}$$

تعريف(1-2-2): يقال للمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) بأنها:

1. مجموعة شبه مفتوحة (semi-open set) [23] اذا وجدت مجموعة مفتوحة G إذ إن $G \subseteq A \subseteq CL(G)$.

2. مجموعة مفتوحة من النمط $\delta -$ $(\delta - open\ set)$ [20] اذا كانت $A = Int_{\delta}(A)$ حيث أن:

$$Int_{\delta}(A) = \cup \{G : G \in RO(X), G \subseteq A\}$$

ومجموعة مغلقة من النمط $\delta-$ $(\delta-closed\ set)$[6] اذا كانت $A = Cl_{\delta}\ (A)$ حيث أن:

$$CL_{\delta}\ (A) = \{\, x \in X: Int\,\big(CL\,(G)\big) \cap A\ \neq\ \emptyset, x\ \in G\ \in \tau\}$$

3. مجموعة مفتوحة من النمط $\theta-$ $(\theta-open\ set)$ [10] اذا كانت $A = Int_{\theta}\ (A)$ حيث أن:

$$Int_{\theta}\ (A) = \cup\, \{G: G\ \in\ \tau, CL\ (G) \subseteq A\}$$

ومجموعة مغلقة من النمط $\theta-$ $(\theta-closed\ set)$ [6] اذا كانت $A = CL_{\theta}\ (A)$ حيث أن:

$$CL_{\theta}\ (A) = \{x \in X: CL\ (G) \cap A \neq \emptyset, x\ \in G\ \in\ \tau\,\}$$

4. مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha-$ $(\alpha\ -open\ set)$[2] اذا كانت $A\ \subseteq Int\ (CL\big(Int\ (A)\big))$ ومجموعة مغلقة من النمط $\alpha-$ $(\alpha-closed\ set)$ اذا كانت $A\ \supseteq CL\ (Int\ \big(CL\ (A)\big))$.

5. مجموعة مفتوحة من النمط $i-$ $(i-open\ set)$[30] اذا وجدت مجموعة مفتوحة $(G\ \neq\ \emptyset, X)$ حيث إن $A \subseteq CL\ (A\ \cap G)$.

ملاحظة (1-2-3):

متممة كل مجموعة من أنماط المجاميع المفتوحة الواردة في تعريف (1-2-2) هي مجموعة مغلقة من النمط نفسه والعكس صحيح.

تعريف (1-2-4): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن $A \subseteq X$ فان:

1. تقاطع كل المجموعات المغلقة من النمط $- \alpha$ التي تحتوي على A يسمى انغلاق المجموعة A من النمط $- \alpha$ $(\alpha - clouser\ of\ A)$ [2] أي أن:

$$CL_{\alpha}(A) = \cap \{F : A \subseteq F \in C(\tau^{\alpha})\}$$

2. تقاطع كل المجموعات المغلقة من النمط $- i$ التي تحتوي على A يسمى انغلاق المجموعة A من النمط $- i$ $(i - clousre\ of\ A)$ [30] أي أن:

$$CL_{i}(A) = \cap \{F : A \subseteq F \in C(\tau^{i})\}$$

تعريف (1-2-5): لتكن (X,τ) فضاءً تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ فان:

1. اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط $- \alpha$ المحتوى في A يسمى داخل المجموعة A من النمط$-\alpha$ $(\alpha - \text{interior of } A)$ [2] أي أن:

$$Int_{\alpha}(A) = \cup \{G : G \in \tau^{\alpha}, \quad G \subseteq A\}$$

2. اتحاد كل المجموعات شبه المفتوحة المحتواة في A يسمى شبه داخل المجموعة A $(semi - interior\ of\ A)$ [23] أي أن:

$$Int_{s}(A) = \cup \{G : G \in \tau^{s}, \quad G \subseteq A\}$$

3. اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط $- \delta$ المحتواة في A يسمى داخل المجموعة A من النمط $- \delta$ $(\delta - \text{interior of } A)$ [20] أي أن:

$$Int_{\delta}(A) = \cup \{G : G \in \delta o(X), G \subseteq A\}$$

4. اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط $\theta -$ المحتواة في A يسمى داخل المجموعة A من النمط $\theta -$ $(\theta - inte\ of\ A)$ [10] أي أن:

$$Int\ \theta\ (A) = \cup \{ G : G \in \theta\ o\ (X), \quad G \subseteq A \}$$

5. اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط $i -$ المحتواة في A يسمى داخل المجموعة A من النمط $i -$ $(i - interior\ of\ A)$ [30] أي أن:

$$Int_{\ i}\ (A) = \cup \{ G : G \in \tau^i, \quad G \subseteq A \}$$

مبرهنة(1-2-6): [30]

إذا كانت A مجموعة مفتوحة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) ومن النمط $i-$، فان $A = Int_{\ i}\ (A)$

مبرهنة (1-2-7): [30]

اذا كانت A مجموعة مغلقة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) ومن النمط $i-$ فان $A = CL_i\ (A)$

ملاحظة (1-2-8): [10]

كل مجموعة مفتوحة (مغلقة) من النمط $\theta -$ في الفضاء التبولوجي (X, τ) هي مجموعة مفتوحة (مغلقة).

ملاحظ (1-2-9): [20]

كل مجموعة مفتوحة (مغلقة) من النمط $\delta -$ في الفضاء التبولوجي (X, τ) هي مجموعة مفتوحة (مغلقة).

نتيجة (1-2-10): [30]

ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً فإن :

1. كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $-i$.
2. كل مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $-i$
3. كل مجموعة شبه مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $-i$.

مبرهنة (1-2-11): [30]

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجيا وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X، عندئذ العبارات الآتية صحيحة:

1. $Int_i(X) = X, Int_i(\emptyset) = \emptyset$
2. $Int_i(A) \subseteq A$
3. اذا كانت B مجموعة مفتوحة من النمط $-i$ محتواه في A فان $B \subseteq Int_i(A)$
4. اذا كانت $A \subseteq B$ فان $Int_i(A) \subseteq Int_i(B)$
5. $Int_i(Int_i(A)) = Int_i(A)$
6. $Int_i(A) \cup Int_i(B) \subseteq Int_i(A \cup B)$
7. $Int_i(A \cap B) \subseteq Int_i(A) \cap Int_i(B)$

مبرهنة (1-2-12)[30]:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجيا وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة:

1. $CL_i(X) = X, CL_i(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subseteq CL_i(A)$

3. اذا كانت B مجموعة مغلقة من النمط $i-$ تحتوي على A ، فان $CL_i(A) \subseteq B$

4. اذا كانت $A \subseteq B$، فان $CL_i(A) \subseteq CL_i(B)$

5. $CL_i(CL_i(A)) = CL_i(A)$

6. $CL_i(A) \cup CL_i(B) = CL_i(A \cup B)$

7. $CL_i(A \cap B) \subseteq CL_i(A) \cap CL_i(B)$

نتيجة(1-2-13): [2]

ليكن (X, τ) **فضاءً** تبولوجياً فإن :

1. كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة شبه مفتوحة.

2. كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$

3. كل مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ هي مجموعة شبه مفتوحة.

تعريف (1-2-14):

يقال للمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) بانها:

1. مجموعة مغلقة من النمط $w-$ $(w-\text{closed set})$ [17] اذا كان $CL(A) \subseteq G$ عندما $A \subseteq G$ و G هي مجموعة شبه مفتوحة في (X, τ).

2. مجموعة مغلقة من النمط $\alpha w-$ $(\alpha w-\text{closed set})$ [13] اذا كان $w\,cl(A) \subseteq G$ عندما $A \subseteq G$ و G مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ في (X, τ).

ملاحظة (1-2-15): متممة كل مجموعة من انماط المجاميع المغلقة الواردة في التعريف (1-2-14) هي مجموعة مفتوحة من النمط نفسه والعكس صحيح.

مثال: (1-2-16): لتكن $X = \{1,2,3\}, \quad \tau = \{\emptyset, X, \{2\}, \{2,3\}\}$

فإن $C(\tau) = \{\emptyset, X, \{1,3\}, \{1\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$

$\tau^{S} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$

الأن المجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{1\}$ هي $\{1,2\}$ ، X

$CL(\{1\}) = \{1\} \subseteq \{1,2\}, X$

مما تقدم $\{1\}$ مجموعة مغلقة من النمط- w

والمجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{2\}$ هي $\{2\}$ ، $\{2,3\}$ ، $\{1,2\}$، X

$CL(\{2\}) = X \nsubseteq \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}$

لذلك فان $\{2\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط- w

والمجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{3\}$ هي $\{2,3\}$، X

$CL(\{3\}) = \{1,3\} \nsubseteq \{2,3\}$

نحصل على $\{3\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط- w

وبالطريقة نفسها نحصل على المجاميع المغلقة من النمط-w وهي: $\{\emptyset, X, \{1\}, \{1,3\}\}$

الأن المجاميع المفتوحة من النمط- α التي تحتوي على $\{1\}$ هي $X, \{1,2\}$

$wCL(\{1\}) = \{1\} \subseteq X$

مما تقدم $\{1\}$ مجموعة مغلقة من النمط-αw

والمجاميع المفتوحة من النمط-α التي تحتوي على $\{2\}$ هي $\{2\}$ ، $\{2,3\}$ $X,$

$wCL(\{2\}) = X \nsubseteq \{2\}, \{2,3\}$

لذلك فان $\{2\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط-αw

وبالطريقة نفسها نحصل على :

$\alpha wC\ (X,\tau) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

مبرهنة (1-2-17): [17]

كل مجموعة مغلقة من النمط -w في الفضاء التبولوجي (X, τ) هي مجموعة مغلقة من النمط-$\alpha\ w$

تعريف (1-2-18): يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه :

1. فضاء-α (α-space) [2] إذا كانت كل مجموعة مغلقة من النمط-α فيه هي مجموعة مغلقة.
2. فضاء-i (i-space) [30] إذا كانت كل مجموعة مغلقة من النمط-i فيه هي مجموعة مغلقة.

مثال(1-2-19): لتكن $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

عندئذ (X, τ) فضاء - α لان $c(\tau) = c(\tau^{\alpha}) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}\}$

مثال (1-2-20): لتكن $X = \{a,b\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\tau^{i} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

عندئذ (X, τ) فضاء - i لان $c(\tau) = c(\tau^{i}) = \{\emptyset, X, \{b\}\}$

(3-1) التطبيقات المفتوحة – المستمرة والمتشاكلة من النمط – i ومن النمط – α في الفضاء التبولوجي

في هذا البند سوف نفرض أن (X,τ)، (Y,δ) فضاءين تبولوجيين وأن f تطبيق من (X,τ) إلى (Y,δ)

تعريف (1-3-1): يقال للتطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ بانه:

1. تطبيق مستمر (Continuous) [3] إذا كان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في $(,\tau)$ لكل مجموعة مفتوحة G في (Y,δ).
2. تطبيق مستمر من النمط – α ($\alpha-continuous$) [29] إذا كان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط – α في (X,τ) لكل مجموعة مفتوحة G في (Y,δ).
3. تطبيق مستمر من النمط – i ($i-continuous$) [30] إذا كان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط – i في (X,τ) لكل مجموعة مفتوحة G في (Y,δ).

مبرهنة (1-3-2):

ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تطبيقاً عندئذٍ:

1. إذ كان f مستمراً فإن f مستمراً من النمط–α . [2]
2. إذ كان f مستمراً فإن f مستمراً من النمط–i . [30]
3. إذ كان f مستمراً من النمط–α فإن f مستمراً من النمط–i . [30]

تعريف (1-3-3): يقال للتطبيق $f: (X, \tau) \to (Y, \delta)$ بأنه:

1. تطبيق مفتوح (open mapping) [21] إذا كانت $G \in$ فإن δ $f(G) \in$. بمعنى أن f تنقل مجموعة مفتوحة إلى مجموعة مفتوحة.
2. تطبيق مفتوح من النمط $\alpha -$ $(\alpha - open\ mapping)$ [11] اذا كانت الصورة $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha -$ في (Y, δ) لكل مجموعة مفتوحة G في (X, τ)، بمعنى أن f تنقل مجموعة مفتوحة إلى مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$.
3. تطبيق مفتوح من النمط $i -$ $(i - open\ mapping)$ [30] اذا كانت الصورة $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط $i -$ في (Y, δ) لكل مجموعة مفتوحة G في (X, τ)، بمعنى أن f تنقل مجموعة مفتوحة إلى مجموعة مفتوحة من النمط $i-$.

مبرهنة (1-3-4) :

ليكن $f: (X, \tau) \to (Y, \delta)$ تطبيقاً عندئذٍ:

1. إذ كان f تطبيقاً مفتوحاً فإن f تطبيقاً مفتوحاً من النمط $\alpha-$. [2]
2. إذ كان f تطبيقاً مفتوحاً فإن f تطبيقاً مفتوحاً من النمط $i-$. [30]
3. إذ كان f تطبيقاً مفتوحاً من النمط $\alpha-$ فإن f تطبيقاً مفتوحاً من النمط $i-$. [30]

تعريف (1-3-5) : يقال للتطبيق $f: (X, \tau) \to (Y, \delta)$ بانه:

1. تشاكل تبولوجي (Homeomorphism Topological) [7] إذا كان :

. مستمر . تقابلي (متباين، شامل) . مفتوح

2. تشاكل تبولوجي من النمط$-i$ (Topological i- homeomorphism) [30] إذا كان:

. مستمر من النمط$-i$. تقابلي (متباين، شامل) . مفتوح من النمط$-i$

3. تشاكل تبولوجي من النمط$-\alpha$ (Topological α- homeomorphism) [22] إذا كان:

. مستمر من النمط$-\alpha$. تقابلي (متباين، شامل) . مفتوح من النمط$-\alpha$

مبرهنة (1-3-6):

ليكن $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ تطبيقاً عندئذٍ:

1. إذ كان f تشاكلاً تبولوجياً فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-\alpha$. [22]
2. إذ كان f تشاكلاً تبولوجياً فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-i$. [30]
3. إذ كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-\alpha$ فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-i$. [30]

تعريف (1-3-7): الفضاء التبولوجي (X,τ) يقال إنه

1. فضاء $-T_0$ [32] إذا حقق البديهية الآتية: لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X توجد مجموعة مفتوحة U في X تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الأخرى .
2. فضاء$-T_1$ [32] إذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X توجد مجموعتان مفتوحتان U وV في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y\notin U, x\in U$ أو $y\in V, x\notin V$

تعريف (1-3-8) : الفضاء التبولوجي (X,τ) يقال إنه :

1. فضاء T_{oi}- [27] اذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X توجد مجموعة مفتوحة في النمط i- U في X تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الآخرى.
2. فضاء T_{1i}- [27] إذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X، توجد مجموعتان مفتوحتان من النمط i- V و U في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y \notin U , x \in U$ أو $y \in V , x \notin V$

تعريف (1-3-9): يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه:

1. فضاء- $T_{0\alpha}$ [25] اذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X، توجد مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha -$ U في X تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الأخرى .
2. فضاء- $T_{1\alpha}$ [25] اذا حقق البديهية الآتية: لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الىX، توجد مجموعتان مفتوحتان في النمط $\alpha -$ V وU في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y \notin U , x \in U$ أو $y \in V , x \notin V$

ملاحظة (1-3-10):[1]

كل مجموعة مفتوحة (مغلقة) منتظمة في الفضاء التبولوجي (X,τ) هي مجموعة مفتوحة (مغلقة).

تعريف (1-3-11): تسمى المجموعة الجزئية A في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) :

1. المجموعة المفتوحة $-\tau_1 \ \tau_2$ [12] اذا كان $A \in \tau_1 \cup \tau_2$
2. المجموعة المفتوحة من النمط $-\tau_1 \ \tau_2 - \alpha$ [24] اذا كانت

$$A \subseteq \tau_1 - int\,(\tau_2 - CL\,(\tau_1 - int\,(A))$$

3. المجموعة المفتوحة من النمط $-\tau_1 \ \tau_2 - i$ [26] اذا وجدت مجموعة مفتوحة $G \in \tau_1$ X , $G \neq \emptyset$ بحيث ان $A \subseteq \tau_2 - CL\,(A \cap G)$

تعريف (1-3-12): [21]

يقال للتطبيق $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \delta_1, \delta_2)$ أنه تطبيق مستمر إذا وفقط إذا كانت $f^{-1}(G)$ هي مجموعة مفتوحة $-\tau_1 \ \tau_2$ في (X, τ_1, τ_2) لكل مجموعة مفتوحة $G-$ $\delta_1 \ \delta_2$ في (Y, δ_1, δ_2) .

تعريف (1-3-13): [26]

يقال للتطبيق $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \delta_1, \delta_2)$ أنه تطبيق مستمر من النمط-i إذا وفقط إذا كانت $f^{-1}(G)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط-i $-\tau_1 \ \tau_2$ في (X, τ_1, τ_2) لكل مجموعة مفتوحة $G-$ $\delta_1 \ \delta_2$ في (Y, δ_1, δ_2) .

الفصل الثاني

المجاميع المفتوحة من النمط - ii وعلاقتها مع المجاميع المفتوحة الأخرى في الفضاءات التبولوجية

ii- Open Sets and Relation with other open sets in Topological spaces

نجاستاد عام 1965 [16] أول من وضح مفهوم المجاميع المفتوحة من النمط $-\alpha$ الذي هو صنف من أصناف المجاميع المفتوحة. أهم خصائص هذه المجموعة أن $(\tau \subset \tau^{\alpha})$. وأن (X, τ^{α}) تمثل فضاءً تبولوجياً، كذلك عامر وصبيح عام 2012 [30] عرف المجموعة المفتوحة من النمط$-i$ كتعميم للمجموعة شبه المفتوحة المعرفة من قبل ليفيني [14]. في هذا الفصل قمنا بتعريف المجموعة المفتوحة من النمط$-ii$ التي هي مجموعة وسطية بين المجموعة المفتوحة من النمط$-i$ والمجموعة المفتوحة من النمط$-\alpha$. لذا تعريف هذه المجموعة مستنبط من تعريف المجموعة المفتوحة من النمط$-i$ بإضافة شرط آخر يجعل من هذه العائلة تمثل فضاءً تبولوجياً أي أن $\left(\tau \subset \tau^{ii}\right)$ وأن (X, τ^{ii}) تمثل فضاءً تبولوجياً . وكذلك قمنا بدراسة هذه المجموعة وعلاقتها بمجاميع أخرى مثل المجموعة المفتوحة من النمط$-\theta$ والمجموعة المفتوحة من النمط$-\delta$. كذلك قمنا بدراسة الغاية والداخل والانغلاق والجبهة من النمط$-ii$ وذلك بذكر عدد من صفاتها وخصائصها معززاً ذلك بالأمثلة والمبرهنات.

(1-2) المجاميع المفتوحة من النمط-ii :

في هذا البند سوف نعرف المجموعة المفتوحة من النمط $- ii$ ونقدم عدد من خصائصها وصفاتها ونبين العلاقة بينها وبين المجاميع المفتوحة الأُخرى.

تعريف (2-1-1): المجاميع المفتوحة من النمط – Int

يقال للمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) بأنها مجموعة مفتوحة من النمط $- Int$ $(Int - \text{open set})$ اذا وجدت مجموعة مفتوحة G $(G \neq \emptyset, X)$ بحيث ان

$Int\ (A)=G$ ، وتسمى مجموعة مغلقة من النمط – Int اذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة من النمط - Int. ومن التعريف نستدل بأن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط - Int. الأمثلة الآتية هي أمثلة للمجاميع المفتوحة من النمط–Int .

مثال(2-1-2): لتكن $X=\{a, b, c\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$

$A=\{a, b\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G=\{b\}$ اذ ان $Int\{a, b\}=\{b\}$ نستنتج بأن $A=\{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط – Int.

$A=\{c\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G=\{b, c\}$ اذ ان $Int\{c\}=\emptyset$ نستنتج بأن $A=\{c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط – Int. وبالطريقة نفسها وحسب التعريف (2-1-1) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط – Int هي:

$$\tau^{Int} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$$

مثال (2-1-3): لتكن $X=\{a, b, c\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

حسب التعريف (2-1-1) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط – Int هي:

$$\tau^{Int} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

المجاميع المغلقة من النمط – Int هي: $C(\tau^{Int}) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}, \{c\}, \{b\}\}$

تعريف (2-1-4): **المجاميع المفتوحة من النمط** – ii

يقال للمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنها مجموعة مفتوحة من النمط -ii (ii – open set) اذا وجدت مجموعة مفتوحة G ($G\neq\emptyset, X$) بحيث ان:

$$A\subseteq CL\,(A\cap G)\,, \qquad Int\,(A)=G$$

ويقال بأنها مجموعة مغلقة من النمط – ii اذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة من النمط – ii

ملاحظة (2-1-5) : في التعريف أعلاه، نعلم أن (X, τ^i) هي ليست فضاء تبولوجي بشكل عام. لذلك تم اختيار شرط ثالث يسمح لنا بحذف عدد من المجاميع المفتوحة من النمط$-i$ التي تجعل (X, τ^i) تمثل فضاءً تبولوجياً وأطلقنا على هذه المجاميع المفتوحة مع شرطها الثالث بالمجاميع المفتوحة من النمط$-ii$.

الأمثلة الأتية هي امثلة للمجاميع المفتوحة من النمط$-ii$.

مثال (2-1-6): لتكن $X = \{a, b, c\} \quad , \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $C(\tau) = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$

1− $A=\{a\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G=\{a\}$ اذا ان:

$Int\,\{a\} = \{a\} = G \qquad \{a\} \subseteq CL\,(\{a\} \cap \{a\}) = X$

نستنتج بان $A=\{a\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$

2- $A = \{a, b\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G=\{a\}$ اذا ان:

$Int\,(\{a, b\}) = \{a\} = G \qquad \{a, b\} \subseteq CL\,(\{a,b\} \cap \{a\}) = X$

نستنتج بأن $A=\{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط - ii

$A = \{a, c\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G=\{a\}$ اذ ان:

$Int\,(\{a, c\}) = \{a\} = G \qquad \{a, c\} \subseteq CL\,(\{a, c\} \cap \{a\}) = X$

نستنتج بان $A=\{a, c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط - ii

المجاميع المفتوحة من النمط - ii هي: $\tau^{ii} = \{\emptyset, X\, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

ولكن $\{b\}, \{c\}$, $\{b, c\}$ لا تمثل مجاميع مفتوحة من النمط - ii لأن لا يوجد مجموعة مفتوحة G إذ إن:

$Int\,(\{b\}) = G \qquad \{b\} \subseteq CL\,(\{b\} \cap G)$

$\{c\} \subseteq CL\ (\{c\} \cap G)$ $\qquad$ $Int\ (\{c\}) = G$

$\{b, c\} \subseteq CL\ (\{b, c\} \cap G)$ $\qquad$ $Int\ (\{b, c\}) = G$

مثال (2-1-7): لتكن $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ $\quad$ $X = \{a, b, c, d\},$

$C\ (\tau) = \{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}\}$

1− $A=\{a\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G= \{a,b\}$ اذا ان:

$\{a\} \subseteq CL\ (\{a\} \cap \{a, b\}) = \{a\}$ $\qquad$ $Int\ \{a\} = \emptyset \neq G$

نستنتج بان $A= \{a\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط $ii-$

2- $A = \{b\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G= \{b\}$ اذا ان:

$\{b\} \subseteq CL\ (\{b\} \cap \{b\}) = X$ $\qquad$ $Int\ (\{b\}) = \{b\} = G$

نستنتج بأن $A= \{b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط - ii

3 - $A = \{c\}$ توجد مجموعة مفتوحة $G= \{b,c,d\}$ اذ ان:

$\{c\} \subseteq CL\ (\{c\} \cap \{b,c,d\}) = \{c, d\}$ $\qquad$ $Int\ (\{c\}) = \emptyset \neq G$

نستنتج بان $A= \{c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط - ii

وبالطريقة نفسها حسب تعريف (2-1-4) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط$-ii$

$$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$$

المجاميع المغلقة من النمط - ii هي:

$$C\ (\tau^{ii}) = \{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}\}$$

مثال (2-1-8): لتكن $X = R\ , \quad \tau = \{\emptyset, R - Q, R\}$

حيث Q تمثل مجموعة الأعداد النسبية $\qquad$ $C(\tau) = \{R, Q, \emptyset\}$

$\tau^i = \{\emptyset, A_i, R\}$

عندما $A_i \subseteq R - Q$ or $A_i = R - Q$ $\forall_i$

$\Longrightarrow A_i \cap R - Q = A_i$ $CL(\ _i) = R$

$\Longrightarrow A_i \subseteq CL(A_i \cap R - Q)$

A_i هي مجموعة مفتوحة من النمط $i -$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, R - Q, R\}$

$because\ if\ A_i \nsubseteq R - Q \Longrightarrow Int(A_i) = \emptyset \neq A_i$

لذلك المجاميع المفتوحة من النمط $ii -$ هي $\{\emptyset, R - Q, R\}$

مثال(2-1-9): لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{3, 4\}, \{1\}, \{1,3,4\}\}$

$C(\tau) = \{\emptyset, X, \{2, 3, 4\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

حسب تعريف (2-1-4) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط– ii هي:

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1\}, \{1,2\}\}$

مثال (2-1-10): لتكن $X = N$

حيث ان A هي مجموعة منتهية جزئية من X $\tau = \{\emptyset, A, X\}$

حيث ان A^c هي مجموعة غير منتهية جزئية من X $C(\tau) = \{\emptyset, A^c, X\}$

$\tau^i = \{\emptyset, A, B, X\}$

حيث ان B هي اما مجموعة منتهية او مجموعة غير منتهية جزئية من X وان

$A \cap B = finite \Longrightarrow B \subseteq CL(A \cap B) = infinite$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, A, X\}$

لان A هي المجموعة الوحيدة المنتهية الجزئية من وان $Int(A)=A$

مثال (2-1-11): ليكن $X = R$ مع التبولوجيا τ

فالفترتان (a,b), (a,b] هي مجموعتان مفتوحتان من النمط *ii*– ، حيث $-\infty < a \leq b < \infty$

البرهان: الفترة المفتوحة (a,b) هي مجموعة مفتوحة من النمط*ii*– لان حسب تعريف المجموعة المفتوحة من النمط*ii*–

(a,b)$\subseteq CL\big((a,b) \cap (a,b)\big) = CL(a,b) = [a,b]$

Int(a,b)=(a,b)

كذلك الفترة المفتوحة (a,b] هي مجموعة مفتوحة من النمط*ii*– لانه حسب التعريف

(a,b]$\subseteq CL\big((a,b]) \cap (a,b)\big) = CL(a,b) = [a,b]$

Int(a,b]=(a,b)

ولكن (a,b] ليست مجموعة مفتوحة

مثال(2-1-12): لتكن

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\tau = \{\emptyset\ ,\ \{x_1, x_2\}, X\ \}$ فإن

$\tau^{ii} = \big\{\emptyset, X, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}\big\}$

مثال(2-1-13): بالاعتماد على التبولوجيا الاعتيادية على R (المتولدة من الفترات المفتوحة)،

اذا كانتA=(0,1] بحيث ان $(0,1]=\cup_{n=1}^{\infty}(1/n,\ 1]$ ، فان A هي مجموعة من النمط*ii*–.

كما في المثال (2-1-11) ولكنها ليست مجموعة مفتوحة.

مثال(2-1-14): لتكن $X = \{a,b,c,d\} \quad , \ \tau = \{\emptyset, X, \{c\}\}$

$C(\tau) = \{\emptyset, X, \{a,b,d\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$

ملاحظة (2-1-15):

تسمى المجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي $(X, \ \tau)$ انها مجموعة مفتوحة من النمط -ii اذا كانت A مجموعة مفتوحة من النمط – i ومجموعة مفتوحة من النمط - Int .

مثال (2-1-16): لتكن $X = \{a, b, c\} \ , \ \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$

فإن $C(\tau) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a\}\}$

$\tau^{Int} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}$

$\tau^{i} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

ملاحظة(2-1-17): كل مجموعة مفتوحة من النمط – ii في الفضاء التبولوجي $(X, \ \tau)$هي مجموعة مفتوحة من النمط – i والعكس غير صحيح كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-18): لتكن $X = \{a, b, c\} \quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

$C(\tau) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$

$\tau^{i} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$

نلاحظ ان $\{b\} \ = \ A$ مجموعة مفتوحة من النمط – i، لكن A ليست مجموعة مفتوحة من النمط -ii.

ملاحظة (2-1-19) : كل مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ في الفضاء التبولوجي (X, τ) هي مجموعة مفتوحة من النمط $Int -$ والعكس غير صحيح كما في المثال الآتي:

مثال(2-1-20): لتكن $X = \{a, b, c\}\ ,\quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}\}$

$\tau^{Int} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

نلاحظ ان $A = \{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط - Int، لكن A ليست مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$.

في القضية الآتية نعطي أهم خصائص المجموعة المفتوحة من النمط $ii-$ إنها تحوي المجاميع المفتوحة جميعها.

قضية (2-1-21): كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي هي مفتوحة من النمط $ii -$.

البرهـــــان: نفرض أن $(X \ ,\tau)$ فضاء تبولوجي ونفرض أن $G \in \tau$. نلاحظ ان $G \subseteq CL\,(G \cap G)$. هذا يعني أن G هي مجموعة مفتوحة من النمط $i -$.

وبما أن $Int\,(G) = G$ هذا يؤدي إلى أن G هي مجموعة مفتوحة من النمط $Int -$ ، من ذلك نستنتج بأن G هي مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$.■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-22): لتكن $X = \{a, b, c\} \quad A = \{a, b\}\ , \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b\}\}$

توجد $G = \{a\}$ اذ ان $A = \{a, b\} \subseteq CL\,(\{a, b\} \cap \{a\}) \subseteq CL\,\{a\} \subseteq X$

وإن $Int(\{a, b\}) = \{a\}$. لذلك فان $A = \{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ لكن ليست مفتوحة.

نتيجة (2-1-23): كل مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط- ii.

البرهان: نفرض أن (X, τ) هو فضاء تبولوجي وإن $F \subseteq X$ هي أية مجموعة مغلقة. فإن F^C هي مجموعة مفتوحة. وبما أن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ حسب القضية (2-1-21). فإن $F^{\ C}$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $ii-$. إذن F هي مجموعة مغلقة من النمط- ii. ■

عكس هذه النتيجة غير صحيح بشكل عام كما في المثال

لتكن $X = \{a, b, c\}$, $F = \{c\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$

$C(\tau) = \{X, \emptyset\ \{b, c\}, \{b\}\}$

$A = \{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط - ii لذلك فان $F = \{c\}$ مجموعة مغلقة من النمط - ii لكن F ليست مغلقة.

كذلك المجموعة المفتوحة من النمط $- \ ii$ تحوي المجاميع المفتوحة جميعها من النمط- α كما في المبرهنة الآتية:

مبرهنة (2-1-24): كل مجموعة مفتوحة من النمط $- \ \alpha$ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مفتوحة من النمط $- \ ii$.

البرهان: نفرض أن (X, τ) هو فضاء تبولوجي وإن $A \subseteq X$ هي أية مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$

بما أن $A \subseteq Int\ (CL\ (Int\ (A))) \subseteq CL\ (Int\ (A))$.

لذلك فان A هي مجموعة شبه مفتوحة.

وبما ان يوجد مجموعة مفتوحة ، تسمى $G \neq \emptyset, X$ وتحقق الشرط $Int\ (A) \subseteq G$ ، هذا يؤدي الى انه $Int\ (A) \subseteq G \cap A$

نستنتج $A \subseteq CL\ (A \cap G)$.

ولهذا ، A هي مجموعة مفتوحة من النمط $- i$.

الان سوف نبرهن على ان $Int\ (A) = G$.

نلاحظ لو فرضنا ان $Int\ (A) \neq G$ ، لكل $G \in \tau$ ، فان $CL\ (Int\ (A)) \neq CL\ (G)$

من خلال فرضيتنا سوف نستنتج بان

$A \subseteq CL\ (Int\ (A) \cap A \cap G)$

ذلك يؤدي إلى أنه $A \not\subset CL\ (G)$ وهذا تناقض.

نستنتج ان A هي مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$. ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-25): لتكن $X = \{a, b, c, d\}\ ,\ \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset,\ X\ , \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

نجد ان المجموعة $A = \{b\ ,d\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$ لكن ليست مجموعة مفتوحة من النمط - α لان $A \not\subset Int\ (CL\ (Int\ (A)))$

ملاحظة (2-1-26): كل مجموعة مغلقة من النمط$-\alpha$ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط$-ii$.

عكس هذه الملاحظة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-27): لتكن $X=\{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}, F=\{a\}$

$C(\tau) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b\}, \{b\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}\}$

$C(\tau^{ii}) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$

$C(\tau^{\alpha}) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b\}, \{b\}\}$

نجد ان المجموعة $A = \{b,c,d\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$ لذلك فإن $F=\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط$-ii$ لكن F ليست مجموعة مغلقة من النمط$-\alpha$.

نتيجة (2-1-28): كل مجموعة مفتوحة من النمط$-$ α في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مفتوحة من النمط - Int.

البرهان: مباشر من المبرهنة (2-1-24).■

عكس هذه النتيجة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-29): لتكن $X=\{a, b, c\}, \quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{int} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

نجد أن المجموعة $A = \{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط – Int لكن ليست مجموعة مفتوحة من النمط – α ؛ لأنه $A \not\subset Int\,(\,CL\,(Int\,(A)\,))$

نتيجة (2-1-30): كل مجموعة مغلقة من النمط – α في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط – Int.

البرهان: نفرض أن $(X\,,\tau)$ هو فضاء تبولوجي وإن $F \subseteq X$ هي أية مجموعة مغلقة من النمط –α. فإن $F^{\,C}$ هي مجموعة مفتوحة من النمط–α . وبما أن كل مجموعة مفتوحة من النمط –α هي مجموعة مفتوحة من النمط – Int حسب نتيجة (2-1-28). فإن $F^{\,C}$ هي مجموعة مفتوحة من النمط –Int . إذن F هي مجموعة مغلقة من النمط– Int. ■

عكس هذه النتيجة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-31): لتكن $X = \{a, b, c, d\},\ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\},\ \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$C(\tau^{ii}) = \{\mathrm{X}, \emptyset\,, \{b, c, d\}, \{a, c, d\},\ \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, c\}, \{d\}, \{c\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$C\ (\tau^{\alpha}) = \{X,\ \emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{d\}, \{c\}\}$

$A = \{b, d\}$ مجموعة مغلقة من النمط – ii لكن A ليست مجموعة مغلقة من النمط – α.

فضلاً عن ذلك ماذكرنا آنفاً حول علاقة المجموعة المفتوحة من النمط– ii مع المجموعات المفتوحة من النمط - $(\,i\ ,\ Int\,,\,\alpha\,)$ نقدم الآن علاقتها مع المجاميع المفتوحة من النمط – θ والمجاميع المفتوحة من النمط – δ ونبدأ بالملاحظة الآتية:

ملاحظة(2-1-32): كل مجموعة مفتوحة من النمط− θ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مفتوحة من النمط − ii .

عكس هذه الملاحظة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-33): لتكن $X = \{a, b, c\},\ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X,\ \emptyset, \{b, c\}, \{c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

نلاحظ ان $\{a, b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط − ii ، لكن $\{a,b\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط− θ لان:

$\{a, b\} \neq Int_{\theta}(\{a, b\}) = \emptyset$

ملاحظة (2-1-34): كل مجموعة مفتوحة من النمط - δ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مفتوحة من النمط − ii.

عكس الملاحظة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

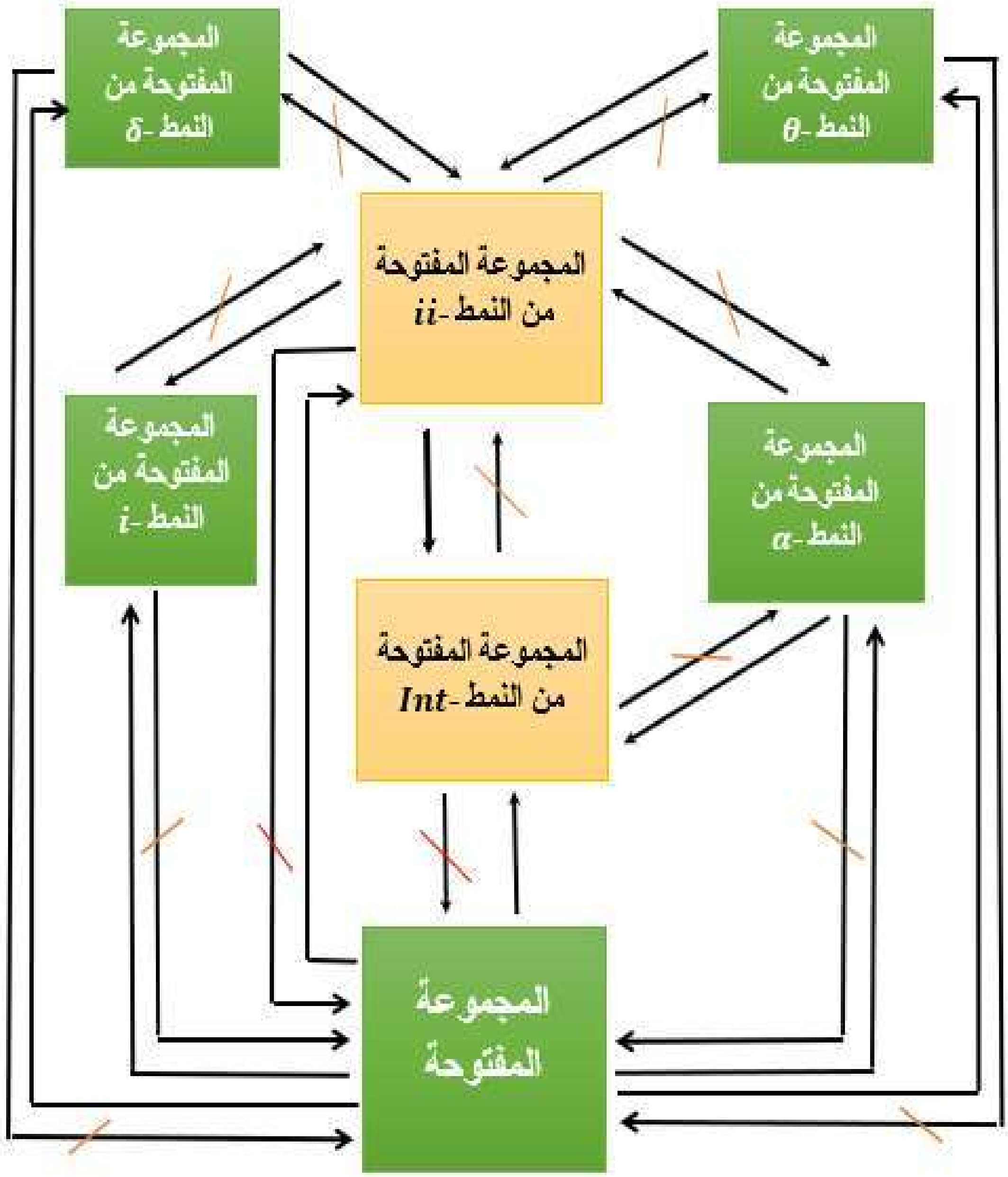
مثال (2-1-35): لتكن $X = \{a, b, c\}\ ,\quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X\ \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$

نلاحظ ان $\{a,\ c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط- ii، لكن $\{a,\ c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط − δ لان $\{a, c\} \neq int_{\delta}(\{a, c\}) = \emptyset$

ملاحظة (2-1-36) :مما تقدم نحصل على المخطط الآتي:



تعريف (2-1-37) : يقال للفضاء التبولوجي (X, τ) بانه فضاء $ii -$ $(ii - \text{space})$ اذا كانت كل مجموعة مغلقة من النمط $ii -$ هي مجموعة مغلقة.

مثال(2-1-38): لتكن $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\text{C}(\tau) = \{X, \emptyset, \{b\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

عندئذ (X, τ) فضاء $ii -$ لان $\text{C}(\tau^{ii}) = \text{C}(\tau) = \{\emptyset, X, \{b\}\}$

مبرهنة (2-1-39) : كل فضاء $i -$ هو فضاء $ii -$.

البرهان: ليكن (X, τ) بانه فضاء $i -$ ، ولتكن A مجموعة مغلقة من النمط $ii -$ في (X, τ). بما ان (كل مجموعة مغلقة من النمط $ii -$ هي مجموعة مغلقة من النمط $i -$). نحصل على ان A مجموعة مغلقة من النمط $i -$ في (X, τ) حسب الفرض، A مجموعة مغلقة في (X, τ) مما تقدم (X, τ) فضاء $ii -$.■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (2-1-40): لتكن $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau =$ $\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

فإن $\text{C}(\tau) = \{X, \emptyset, \{c, d\}, \{d\}, \{c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$\text{C}(\tau^{ii}) = \{\emptyset, X, \{c, d\}, \{d\}, \{c\}\}$

الفضاء التبولوجي (X, τ) هو فضاء $ii -$، لكن (X, τ) ليس فضاء $i -$ ؛ لأن

$\{a, c, d\} \subseteq CL(\{a,c,d\} \cap \{a, b, c\}) = X$

إذ إن $\{a,c,d\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $-i$ وأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة من النمط $-i$ في (X,τ) لكن $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة في (X,τ).

مبرهنة (2-1-41): كل فضاء $-ii$ هو فضاء $-\alpha$.

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $-ii$ ، ولتكن A مجموعة مغلقة من النمط $-\alpha$ في (X,τ) حسب الملاحظة (2-1-26) A مجموعة مغلقة من النمط $-ii$ في (X,τ). حسب الفرض، A مجموعة مغلقة في (X,τ). مما تقدم (X,τ) فضاء $-\alpha$. ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال(2-1-42): لتكن $X=\{1,2,3,4\}\ ,\ \tau=\{\emptyset,X,\{1\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}$

فإن $C(\tau)=\{X,\emptyset,\{2,3,4\},\{1,2\},\{2\}\}$

$\tau^{\alpha}=\{\emptyset,X,\{1\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}$

$C(\tau^{\alpha})=\{X,\emptyset\ \{2,3,4\},\{1,2\},\{2\}\}$

$\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{1\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}$

$C(\tau^{ii})=\{X,\emptyset,\{2,3,4\},\{3,4\},\{1,2\},\{2\}\}$

الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء $-\alpha$ ، لكن (X,τ) ليس فضاء $-ii$ لان$\{3,4\}$ مجموعة مغلقة من النمط $-ii$ في (X,τ) لكن$\{3,4\}$ ليست مجموعة مغلقة في (X,τ).

وأهم مبرهنات الفصل الثاني (البند الأول) هي كالآتي:

مبرهنة(2-1-43): إذا كانت τ تبولوجيا على X فإن τ^{ii} كذلك تكون تبولوجيا على X.

البرهـــان: نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي, ولتكن $A\subseteq X$ مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$, سوف نثبت ان A مجموعة مفتوحة, اي ان

ليكن $x \in A$ يو جد مجموعة مفتوحة مثل $G \in \tau$ وبحيث ان

$$x \in G \subseteq A$$

بما ان A مجموعة مفتوحة من النمط $-ii$، فانه يوجد $G \neq \emptyset, X$ بحيث ان

$$Int\,(A) = G \quad \text{و} \quad A \subseteq CL\,(A \cap G)$$

الان, البرهان يكون في اتجاهين

1. اذا كان $x \in G$
2. اذا كان $x \notin G$

الحالة الاولى 1) : $x \in G$. بما ان $Int(A)=G$ هذا يؤدي الى ان $G \subseteq A$ وعلية نحصل على ان $x \in G \subseteq A$.

الحالة الثانية 2) : $x \notin G$. ايضا بما ان $Int(A)=G$ هذا يؤدي الى ان $x \notin Int(A)$. بما ان $x \in A$ هي اختبارية وان $Int(A) \subseteq A$ نحصل على تناقض.

نستنتج ان A مجموعة مفتوحة. ■

مثال(2-1-44): ليكن $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$

فإن $C\,(\tau) = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$

نلاحظ ان (X, τ) هو فضاء تبولوجي وان (X, τ^{ii}) كذلك يمثل فضاء تبولوجي لانه يحقق شروط الفضاء التبولوجي.

(2-2) : بعض خصائص المجاميع المفتوحة من النمط - ii في الفضاءات التبولوجية.

إذا كانت A مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$ في (X, τ) فإن A^c مجموعة مغلقة من النمط $- ii$. في هذا البند درسنا عدد من خصائص المجاميع المفتوحة من النمط$-ii$ التي تضمنت كل من أنغلاق المجموعة من النمط$- ii$ (ii-closure of a set A)، داخل المجموعة من النمط $- ii$ (ii- interior of a set A)، جبهة المجموعة من النمط $- ii$ (ii- boundary of a set A) ، وحدود المجموعة من النمط$- ii$ (ii-frontier of a set A) ، ومشتقة المجموعة من النمط$- ii$ (ii- derived of a set A).

تعريف (2-2-1): نقاط الغاية من النمط – ii

ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً ولتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X تسمى النقطة $x \in X$ نقطة غاية من النمط $- ii$ للمجموعة A (ii – limit point of A) اذا كان لكل مجموعة G مفتوحة من النمط $- ii$ تحوي x فان $(A \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ مجموعة كل نقاط الغاية من النمط $- ii$ للمجموعة A تسمى مشتقة المجموعة A مغلقة من النمط $- ii$ (ii- derived of A) ونرمز لها بالرمز $D_{ii}(A)$.

نتيجة (2-2-2): ليكن (X, τ^{ii}) فضاءاً تبولوجياً ولتكن A مجموعة جزئية من X فإن A مجموعة مغلقة من النمط$-ii$ إذا وفقط إذا كان $D_{ii}(A) \subseteq A$.

مثال (2-2-3): لتكن $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}. \{a, b\}, \{a, c\}\}$

اذ ان (X, τ^{ii}) فضاء تبولوجي ولتكن $A_1 = \{a, b\}$ ، $A_2 = \{b, c\}$ فاذا اخذنا $a \in X$ فان المجاميع المفتوحة من النمط $- ii$ التي تحوي a هي X , $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$

$A_1 \cap \{a\} - \{a\} = \emptyset$ نستنتج بان $a \notin D_{ii}\ (A_1)$ واذا اخذنا $b \in X$ فان المجاميع المفتوحة

من النمط -ii التي تحوي b هي X , $\{a, b\}$

$\mathrm{A}_1 \cap \{\mathrm{a},\mathrm{b}\} - \{\mathrm{b}\} \neq \emptyset$ و $_1 \cap X - \{b\} \neq \emptyset$ نستنتج بأن $b \in D_{ii}\ (A_1)$

وبالطريقة نفسها نستنتج بان $c \in D_{ii}\ (A_1)$ لذلك $D_{ii}\ (A_1) = \{b, c\} \nsubseteq A_1$ نستنتج بان

A_1 ليست مجموعة مغلقة من النمط $- ii$ وبالطريقة نفسها $(D_{ii}\ (A_2) = \emptyset \subset A_2)$ نستنتج

بأن A_2 مجموعة مغلقة من النمط $- ii$.

في المبرهنة الآتية نعطي عدداً من خواص مشتقة المجموعة من النمط $- ii$.

مبرهنة(2-2-4): ليكن (X, τ^{ii}) فضاء تبولوجي. وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X . عندئذ العبارات الآتية صحيحة:

1. $D_{ii}\ (A) \subseteq D\ (A)$ حيث ان $D(A)$ تمثل مشتقة المجموعة A .
2. اذا كانت $A \subseteq B$ فان $D_{ii}(A) \subseteq D_{ii}(B)$
3. $D_{ii}(A \cap B) \subset D_{ii}(A) \cap D_{ii}\ (B)$ و $D_{ii}(A) \cup D_{ii}(B) \subset D_{ii}(A \cup B)$.
4. $D_{ii}\ (\ D_{ii}(A) \setminus A) \subset D_{ii}(A)$
5. $D_{ii}(A \cup D_{ii}(A)) \subset A \cup D_{ii}(A)$

البرهان: 1. يكفي للملاحظة ان كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$.

2. لتكن $_i\ (A)$ $x \in$ فان كل مجموعة G التي هي من النمط $- ii$ تحوي x تحقق الآتي:

$(A \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .... (1)

بما ان $A \subseteq B$ نحصل على $(A \cap G) \subseteq (B \cap G)$ وهذا يؤدي إلى ان

مـن (1) $(A \cap G) \setminus \{x\} \subseteq (B \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$

مـــن هـــذا نســـتنتج بـــأن $(B \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, $x \in D_{ii}(B)$ نســـتنتج

بأن $D_{ii}(A) \subseteq D_{ii}(B)$

3. بما ان $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ من (2) نحصل على:

$$D_{ii}(A) \subseteq D_{ii}(A \cup B), \qquad D_{ii}(B) \subseteq D_{ii}(A \cup B)$$

وهذا يؤدي إلى ان $D_{ii}(A) \cup D_{ii}(B) \subseteq D_{ii}(A \cup B)$

بما ان $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$

من (2) نحصل على

$$D_{ii}(A \cap B) \subseteq D_{ii}(A), D_{ii}(A \cap B) \subseteq D_{ii}(B)$$

نستنتج بأن $D_{ii}(A \cap B) \subseteq \quad _{ii}(A) \cap D_{ii}(B)$

4. اذا كان $x \in D_{ii}(D_{ii}(A) \setminus A)$ و G مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ تحتوي على x

فان

$$G \cap (D_{ii}(A) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

نفـــــرض ان $y \in G \cap (D_{ii}(A) \setminus \{x\})$ ، فـــان $y \in D_{ii}(A)$ و $y \in G$ ،

$G \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ نفرض ان $z \in G \cap (A \setminus \{y\})$ فان $z \neq x$ لكل $z \in A$ و $x \notin A$

لذلك $G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. نستنتج، $x \in D_{ii}(A)$.

5. نفرض $x \in D_{ii}(A \cup D_{ii}(A))$. اذا كان $x \in A$ فسوف نحصل على المطلوب لذلك،

نفرض $x \in D_{ii}(A \cup D_{ii}(A)) \setminus A$ فان G مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ تحتوي على x و

$G \cap (A \cup D_{ii}(A) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ لـذلك $G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ او

الان، $G\cap(D_{ii}(A)\setminus\{x\})\neq\emptyset$ من (4) نحصل على $G\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$ لذلك

$x\in D_{ii}(A)$ نستنتج بان $D_{ii}(A\cup D_{ii}(A))\subset A\cup D_{ii}(A)$. ■

بصورة عامة عكس العبارة (1) ليس صحيحاً كذلك المساواة بالنسبة للعبارة (3) لا يمكن ان تحصل كما في المثال الآتي:

مثال (2-2-5): لتكن $X=\{a,b,c\}\ ,\quad \tau=\{\emptyset,X,\{b\}\}$

فإن $\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

1. اذا كان $A=\{c\}$ فان $D(A)=\{a,b\}$ و $D_{ii}(A)=\emptyset$ فان $D(A)\not\subset D_{ii}(A)$.
2. اذا كان $c=\{a,b\}$ و $e=\{c\}$ فان $D_{ii}(c)=\{a,c\}$ و $D_{ii}(e)=\emptyset$ فان:

$D_{ii}(c\cup e)\neq D_{ii}(c)\cup D_{ii}(e)$

تعريف (2-2-6): انغلاق المجموعة من النمط – ii

ليكن (X,τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً ولتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X فان تقاطع كل المجاميع المغلقة من النمط – ii التي تحوي A تسمى انغلاق المجموعة من النمط – ii (ii- closure of A) ونرمز له بالرمز $CL_{ii}(A)$ اذ ان $CL_{ii}(A)=\cap_{s\in\wedge}F_s$ ، $A\subseteq F_s$ لكل s اذا ان F_s مجموعة مغلقة من النمط – ii في الفضاء التبولوجي (X,τ^{ii}).

$CL_{ii}(A)$ هو اصغر مجموعة مغلقة من النمط – ii تحوي A.

في المبرهنة الآتية نُعطي عدداً من خواص إنغلاق المجموعة من النمط– ii.

مبرهنة (2-2-7): ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $x\in X$. فان $x\in CL_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كان $G\cap A\neq\emptyset$ لكل مجموعة G مفتوحة من النمط– ii تحتوي على x

البرهان: لتكن $x\in CL_{ii}(A)$ و G مفتوحة من النمط $ii-$ تحتوي على x بحيث ان $G\cap A=\emptyset$، فان $A\subseteq X\setminus G$ حيث $X\setminus G$ مجموعة مغلقة من النمط $ii-$ ، هذا يعني ان $x\in X\setminus G$ وهذا تناقض.

مما تقدم $G\cap A\neq\emptyset$ لكل مجموعة G مفتوحة من النمط $ii-$ تحتوي على x.

العكس، نفرض ان $G\cap A\neq\emptyset$ لكل مجموعة G مفتوحة من النمط $ii-$ تحتوي على x، ولتكن $x\notin CL_{ii}(A)$ فانة توجد مجموعة F مجموعة مغلقة من النمط $ii-$ بحيث ان $A\subseteq F$ و $x\notin F$، هذا يؤدي الى ان $x\in X\setminus F$ حيث $X\setminus F$ مجموعة مفتوحة من النمط $ii-$ ، ولذلك $X\setminus F\cap A=\emptyset$. وهذا تناقض ، مما تقدم $x\in CL_{ii}(A)$. ■

مبرهنة (2-2-8) : ليكن (X,τ^{ii}) فضاءً تبولوجي وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X. عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة :

1. $CL_{ii}(A)=A\cup D_{ii}(A)$
2. $A\subseteq CL_{ii}(A)$
3. اذا كانت B مجموعة مغلقة من النمط-ii- تحتوي على A، فان $CL_{ii}(A)\subseteq B$
4. اذا كانت $A\subseteq B$ ، فان $CL_{ii}(A)\subseteq CL_{ii}(B)$
5. $CL_{ii}(A)\cup CL_{ii}(B)\subseteq CL_{ii}(A\cup B)$
6. $CL_{ii}(A\cap B).\subseteq CL_{ii}(A)\cap CL_{ii}(B)$
7. $CL_{ii}(A)=CL_{ii}(CL_{ii}(A))$

8. $A = CL_{ii}\ (A)$ اذا وفقط اذا كانت A مجموعة مغلقة من النمط ii-

البرهان : 1. بما ان $D_{ii}(A) \subset CL_{ii}\ (A)$ و $A\cup D_{ii}\ (A) \subset CL_{ii}\ (A)$. من جهة اخرى نفرض $x\in CL_{ii}\ (A)$ اذا كان $x\in A$ فان البرهان اكتمل . اذا كان $x\notin A$ فان كل مجموعة G التي هي من النمط $- ii$ تحوي x تحقق الآتي $(A\cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ لذلك فان $x\in D_{ii}\ (A)$ لهذا $CL_{ii}\ (A) \subset A \cup D_{ii}\ (A)$.

برهان 2،3 مباشر من التعريف

4. نفرض ان $A\subseteq B$ باخذ الانغلاق للطرفين نحصل على ان $CL_{ii}(A) \subseteq CL_{ii}(B)$

5. بما ان $A\subseteq A \cup B$ و $B\subseteq A \cup B$

حسب الخاصية (4) نحصل على

$CL_{ii}(\mathrm{B}) \subseteq CL_{ii}(\mathrm{A \cup B})$ و $CL_{ii}(\mathrm{A}) \subseteq CL_{ii}(\mathrm{A \cup B})$

مما تقدم $CL_{ii}(A) \cup CL_{ii}(B) \subseteq CL_{ii}\ (A \cup B)$

6.بما ان $\mathrm{A}\cap B \subseteq A$ و $\mathrm{A}\cap B \subseteq B$

حسب الخاصية (4) نحصل على

$CL_{ii}(A \cap B) \subseteq CL_{ii}(A)$ و $CL_{ii}(A \cap B) \subseteq CL_{ii}(B)$

مما تقدم $CL_{ii}\ (A \cap B) \subseteq CL_{ii}(A) \cap CL_{ii}(B)$.

7.
$$CL_{ii}\big(CL_{ii}(A)\big) = CL_{ii}\big(A \cup D_{ii}(A)\big)$$
$$= \big(A \cup D_{ii}(A)\big)\ \cup\ D_{ii}\big(A \cup D_{ii}(A)\big)$$

$$= (A \cup D_{ii}(A)) \cup (D_{ii}(A) \cup D_{ii}(D_{ii}(A))$$

$$= \left(A \cup D_{ii}(A)\right) \cup \left(D_{ii}(A) \cup D_{ii}(A)\right)$$

$$= \left(A \cup D_{ii}(A)\right) \cup \ D_{ii}(A)$$

$$= A \cup D_{ii}(A) = CL_{ii}(A)$$

8. نفرض ان $A = CL_{ii}(A)$ يجب ان نثبت ان A مجموعة مغلقة من النمط-ii بما ان

$CL_{ii}(A) = \cap_{s\in\Lambda} F_s$

$A \subseteq F_s$

لكل s اذا ان F_s مجموعة مغلقة من النمط – ii

اذن A مجموعة مغلقة من النمط – ii

العكس: نفرض ان A مجموعة مغلقة من النمط – ii . حسب الخاصية (2) نحصل على:

$$A \subseteq CL_{ii}\ (A) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

بما ان $A \subseteq A$ و A مجموعة مغلقة من النمط – ii، فانة حسب الخاصية (3)،

$$CL_{ii}(A) \subseteq A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

من (2) , (1) نحصل على

$$A = CL_{ii}(A)$$

عكس الخاصية (5)، (6) غير صحيح بشكل عام ، كما في المثال الأتي:

لتكن $X = \{a,b,c\}\ ,\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

$$\mathrm{C}\ (\tau^{ii}) = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$$

ولتكن $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$

$$Cl_{ii}(A) = \{a\}, \qquad Cl_{ii}(B) = \{b\}, \qquad Cl_{ii}\ (A \cup B) = Cl_{ii}\ (\{a,b\}) = X,$$

نلاحظ ان $Cl_{ii}\,(A\cup B)=X \nsubseteq Cl_{ii}\,(A)\,\cup\,Cl_{ii}\,(B)=\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}$

مما تقدم $Cl_{ii}\,(A\cup B) \nsubseteq Cl_{ii}\,(A)\,\cup\,Cl_{ii}\,(B)$

الآن لتكن $B=\{c\}$ و $A=\{a,b\}$

$Cl_{ii}\,(A\cap B)=Cl_{ii}\,(\emptyset)=\emptyset,\qquad Cl_{ii}(B)=\{c\},\qquad Cl_{ii}(A)=X$

نلاحظ ان $Cl_{ii}\,(A)\,\cap\,Cl_{ii}\,(B)=X\cap\{c\}=\{c\} \nsubseteq Cl_{ii}\,(A\cap B)=\emptyset$

مبرهنة (2−2−9): لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، فإن

$X\backslash Int_{ii}(A)=Cl_{ii}\,(X\backslash A)$

البرهان: لتكن $x\epsilon\, X\backslash\, In_{ii}(A)$ ، فإن $x\notin Int_{ii}\,(A)$

وعليه لكل مجموعة G مفتوحة من النمط-ii تحتوي على x، فإن $G \nsubseteq$

ولذلك لكل مجموعة G مفتوحة من النمط-ii تحتوي على x، فإن $G\ \cap X\ \backslash \neq\ \emptyset$

وحسب المبرهنة (2−2−7) ، $x\in\ Cl_{ii}\,(X\backslash A)$

إذن $X\backslash Int_{ii}(A)\subseteq Cl_{ii}\,(X\backslash A)$

العكس، لتكن $x\in\ C_{ii}\,(X\backslash A)$ ، وحسب المبرهنة (2−2−7) فإن لكل مجموعة G مفتوحة من النمط-ii تحتوي على x، فإن $G\ \cap X\ \backslash A\ \neq\ \emptyset$

وعليه لكل مجموعة G مفتوحة من النمط-ii تحتوي على x، فإن $G \nsubseteq$

وحسب تعريف الداخل من النمط -ii فإن $x\ \notin Int_{ii}\,(A)$ ، هذا يعني أن $x\epsilon\, X\backslash\, Int_{ii}(A)$

إذن $Cl_{ii}\,(X\backslash A)\subseteq X\backslash Int_{ii}(A)$

مما تقدم $X\backslash Int_{ii}(\quad)=Cl_{ii}\,(X\backslash A)$. ■

تعريف (2-2-10): داخل المجموعة من النمط ii –

ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً ولتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X فان اتحاد كل المجاميع المفتوحة من النمط – ii المحتواة في A تسمى داخل المجموعة من النمط – ii (ii- interior of A) ونرمز له بالرمز $Int_{ii}(A)$ اذ ان $Int_{ii}(A) = \cup_{s\in\Lambda} G_s$

$G_s \subseteq A$ لكل s إذ إن G_s مجموعة مفتوحة من النمط – ii لكل s في الفضاء التبولوجي (X, τ^{ii}) . $Int_{ii}(A)$ هو أكبر مجموعة مفتوحة من النمط – ii محتواه في A.

في المبرهنة الآتية نعطي عدداً من خواص داخل المجموعة من النمط – ii.

مبرهنة (2-2-11): ليكن (X, τ^{ii}) فضاء تبولوجي. وليكن A,B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X . عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة:

1. $Int_{ii}(A)$ هو اتحاد المجاميع المفتوحة من النمط – ii الجزئية من A.
2. $A= Int_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كان A مجموعة مفتوحة من النمط – ii .
3. $Int_{ii}(Int_{ii}(A)) = Int_{ii}(A)$
4. $Int_{ii}(A) = A \setminus D_{ii}(X \setminus A)$
5. $X \setminus Int_{ii}(A) = CL_{ii}(X \setminus A)$
6. اذا كانت $A\subseteq B$ فان $Int_{ii}(A) \subseteq Int_{ii}(B)$
7. $Int_{ii}(A)\cup Int_{ii}(B) \subseteq Int_{ii}(A\cup B)$
8. $Int_{ii}(A)\cap Int_{ii}(B) \supseteq Int_{ii}(A\cap B)$

البرهان : 1. نفرض ان $\{G_{ii} \setminus ii \in\Lambda\}$ هو تجمع لكل المجاميع المفتوحة من النمط -ii الجزئية من A . اذا كان $x \in Int_{ii}(A)$ فإن يوجد $j\in\Lambda$ إذ إن $x \in G_j \subseteq A$. لذلك $G_{ii} \; x \in \cup_{ii\in\Lambda}$ لذلك $Int_{ii}(A) \subseteq \cup_{ii\in\Lambda} G_{ii}$. من جهة أخرى ، اذا كان

ولـذلك . $K \in \Lambda$ لعـدد مـن $y \in G_K \subseteq A$ فـان $y \in \cup_{ii\in\Lambda} G_{ii}$

. $Int_{ii}(A) = \cup_{ii\in\Lambda} G_{ii}$ نستنتج . $\cup_{ii\in\Lambda} G_{ii} \subseteq Int_{ii}(A)$ و $y \in Int_{ii}(A)$

2. مباشر

3. برهان باستعمال الخاصية (1) و(2).

4. اذا كان $x \in A\backslash D_i(X\backslash A)$ فان $x \notin D_{ii}(X\backslash A)$ لذلك يوجد G مجموعة مفتوحة من النمط -ii تحتوي على x إذ إن $G \cap (X\backslash A)=\phi$. ولهذا $x \in G\subset A$ ولذلك $x \in Int_{ii}(A)$. ذلك يثبت ان $A\backslash D_{ii}(X\backslash A) \subset Int_{ii}(A)$. الآن نفرض أن $x \in Int_{ii}(A)$. بما ان $Int_{ii}(A) \in \tau^{ii}$ و $Int_{ii}(A) \cap (X\backslash A) = \phi$ سوف نحصل على $x \notin D_{ii}(X\backslash A)$. لذلك $Int_{ii}(A) = A\backslash D_{ii}(X\backslash A)$.

5. باستعمال الخاصية (4) والمبرهنة (2-2-8) الخاصية (1) نحصل على:

$$X\backslash Int_{ii}(A)=X\backslash(A\backslash D_{ii}(X\backslash A) = (X\backslash A) \cup D_{ii}(X\backslash A) = CL_{ii}(X\backslash A)$$

6. بما ان $A \subseteq B$ و $Int_{ii}(A) \subseteq A$. كذلك بما أن $Int_{ii}(B) \subseteq B$ نستنتج بأن $Int_{ii}(A) \subseteq Int_{ii}(B)$

7. بما أن $B \subseteq (A\cup B)$ ، $A \subseteq (A\cup B)$ من (6) نحصل على $Int_{ii}(B) \subseteq Int_{ii}(A\cup B)$ و $Int_{ii}(A) \subseteq Int_{ii}(A\cup B)$ نستنتج بأن $Int_{ii}(A)\cup Int_{ii}(B) \subseteq Int_{ii}(A\cup B)$.

8. بما ان $A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$ من (6) نحصل على $Int_{ii}(A \cap B) \subseteq Int_{ii}(B)$ و $Int_{ii}(A \cap B) \subseteq Int_{ii}(A)$ نستنتج بأن $Int_{ii}(A \cap B) \subseteq Int_{ii}(A) \cap Int_{ii}(B)$. ■

مبرهنة (2-2-12): اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X فان $Int_{\theta}(A) \subseteq Int_{ii}(A)$.

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، ولتكن $x \in Int_{\theta}(A)$

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G: G \in O(X), CL(G) \subseteq A\}$

هذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة G بحيث ان $x \in G \subseteq CL(G) \subseteq A$

حسب القضية (2-1-21)، G مجموعة مفتوحة من النمط $ii-$.

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G: G \in IIO(X), G \subseteq A\}$

وعليه $x \in Int_{ii}(A)$

مما تقدم $Int_{\theta}(\quad) \subseteq Int_{ii}(A)$. ■

عكس المبرهنة ليس صحيح بشكل عام كما في المثال الاتي:

مثال (2-2-13): لتكن $X = \{a, b, c\},\ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

الان لتكن $A=\{a,b\}$ وان

$Int_{ii}(A) = \{a, b\}$, $Int_{\theta}(A) = \emptyset$

نلاحظ ان : $Int_{ii}(A) \nsubseteq Int_{\theta}(A)$

مبرهنة (2-2-14): اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X فان $Int_{\delta}(A) \subseteq Int_{ii}(A)$.

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، ولتكن $x \in Int_{\delta}(A)$

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G: G \in RO(X), G \subseteq A\}$

هذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة منتظمة G بحيث ان $x \in G \subseteq A$

حسب الملاحظة (1-3-10) والقضية (2-1-21)، G مجموعة مفتوحة من النمط $ii-$.

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G: G \in IIO(X), G \subseteq A\}$

وعليه $x \in Int_{ii}(A)$

مما تقدم $Int_{ii}(A) \subseteq Int_{\delta}(\ \ )$. ■

عكس المبرهنة ليس صحيح بشكل عام كما في المثال الاتي:

مثال (2-2-15): لتكن $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

فإن $C(\tau) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X\, \{a\}, \{a,c\}, \{a,b\}\}$

الان لتكن $A=\{a,c\}$ وان

$Int_{ii}(A) = \{a,c\}$, $Int_{\delta}(A) = \emptyset$

نلاحظ ان : $Int_{ii}(A) \nsubseteq Int_{\delta}(A)$

مبرهنة (2-2-16): اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X فان $Int_{ii}(A) \subseteq Int_i(A)$.

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، ولتكن $x \in Int_{ii}(A)$

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in IIO(X), G \subseteq A\}$

هذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$، G بحيث ان $x \in G \subseteq A$

حسب الملاحظة (2-1-17)، G مجموعة مفتوحة من النمط $- i$.

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in IO(X), G \subseteq A\}$

وعليه $x \in Int_i(A)$

مما تقدم $Int_{ii}(A) \subseteq Int_i(A)$. ■

عكس المبرهنة ليس صحيح بشكل عام كما في المثال الاتي:

مثال (2-2-17): لتكن $X = \{a, b, c\}$ $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

$C(\tau) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$

$\tau^{i} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$

الان لتكن $A=\{b\}$ وان

$Int_{ii}(A) = \emptyset$, $Int_{i}(A) = \{b\}$

نلاحظ ان : $Int_{i}(A) \nsubseteq Int_{ii}(A)$

مبرهنة (2-2-18): اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X فان $Int_{\alpha}(A) \subseteq Int_{ii}(A)$.

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، ولتكن $x \in Int_{\alpha}(A)$

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in \alpha o(X), G \subseteq A\}$

هذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة من النمط$-\alpha$ ، G بحيث ان $x \in G \subseteq A$

حسب المبرهنة (2-1-24)، G مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$.

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in IIO(X), G \subseteq A\}$

وعليه $x \in Int_{ii}(A)$

مما تقدم $Int_{\alpha}(A) \subseteq Int_{ii}(A)$. ■

مبرهنة (2-2-19): اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X فان $Int\ (A) \subseteq Int_{ii}(A)$.

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، ولتكن $x \in Int\ (A)$

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in O(X), G \subseteq A\}$

هذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة G بحيث ان $x \in G \subseteq A$

حسب القضية(2-1-21) ، G مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$.

هذا يؤدي الى ان $x \in \cup \{G : G \in IIO(X), G \subseteq A\}$

وعليه $x \in Int_{ii}(A)$

مما تقدم $Int\ (A) \subseteq Int_{ii}(A)$. ■

عكس المبرهنة (2-2-18),(2-2-19) ليس صحيح بشكل عام كما في المثال الاتي:

مثال (2-2-20): لتكن $X = \{a, b, c, d\}\ ,\ \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset,\ X\ , \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

الان لتكن $A=\{a,c\}$ وان

$Int_{ii}(A) = \{a, c\}\quad ,\quad Int_{\alpha}(A) = \{a\}\ \ ,\quad Int(A) = \{a\}$

نلاحظ ان : $Int_{ii}(A) \nsubseteq Int_{\alpha}(A), Int(A)$

تعريف (2-2-21): يقال للمجموعة الجزئية A في الفضاء التبولوجي (X, τ) بأنها مجموعة مفتوحة ضعيفة من النمط $- ii$ (*weakly ii-open set*) اذا كانت $A \subseteq CL\ (Int(A) \cap A)$ و A مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$.

مبرهنة (2-2-22): لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, τ) فإن A مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة ضعيفة من النمط $- ii$.

البرهان : لتكن A مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha$. وبما أن $A \subseteq Int\ (CL\ (Int(A))$ و$A \subseteq CL\ (A)$ لذلك فإن $A \subseteq CL\ (Int(A)) \cap CL(A)$ هذا يؤدي إلى أن

$A \subseteq CL\,(Int(A) \cap A)$ والآن نضع $G = Int\,(A)$ عندما تكون $G \neq \emptyset\,, X$ بذلك

نحصل على أن A مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$. لذلك فإن A مجموعة مفتوحة ضعيفة من

النمط $ii -$.

العكس : نفرض ان A مجموعة مفتوحة ضعيفة من النمط ii لذلك يوجد مجموعة مفتوحة مثل

G إذ إن $G \neq \emptyset\,, X$ وتحقيق الشروط $A \subseteq CL\,(Int(A) \cap A)$ و $G = Int\,(A)$ و

A مجموعة مفتوحة من النمط-ii. بما ان $A \subseteq CL(Int(A) \cap A)$ هذا يؤدي إلى

$A \subseteq CL\,(Int(A))$ و $Int(A) \subseteq Int\,(CL\,(Int(A))$. وبما ان A مجموعة

مفتوحة من النمط -ii حسب المبرهنة (2-2-11) الفقرة (2) نحصل على ان $A=Int(A)$ نستنتج

$A \subseteq Int(CL(Int(A)))$. لذلك فان A مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha -$.■

تعريف (2-2-23) : ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً . ولتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X.

فان جبهة المجموعة من النمط -ii (ii-border of A) ونرمز له بالرمز $b_{ii}(A)$. وتعرف

بالشكل الآتي: $b_{ii}(A) = A \backslash Int_{ii}(A)$

في المبرهنة الآتية نعطي عدداً من خواص جبهة المجموعة من النمط -ii .

مبرهنة (2-2-24): ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X. عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة :

1. $b_{ii}(A) \subseteq b(A)$ إذ إن $b(A)$ تمثل جبهة المجموعة A
2. $A = Int_{ii}(A) \cup b_{ii}(A)$
3. $Int_{ii}(A) \cap b_{ii}(A) = \phi$
4. $b_{ii}(A) = \phi$ اذا وفقط اذا كان A مجموعة مفتوحة من النمط -ii .
5. $b_{ii}(Int_{ii}(A)) = \phi$

.6 $Int_{ii}(b_{ii}(A)) = \phi$

.7 $b_{ii}(b_{ii}(A)) = b_{ii}(A)$

.8 $b_{ii}(A)= A \cap Cl_{ii}(X\setminus A)$

.9 $b_{ii}(A)= A \cap D_{ii}(X\setminus A)$

البرهان : 1. بما ان $Int(A) \subset Int_{ii}(A)$ سوف نحصل على

$b_{ii}(A) = A\setminus Int_{ii}(A) \subseteq A\setminus Int(A) = b(A)$

(2) و (3) برهان مباشر

4. بما ان $Int_{ii}(A) \subseteq A$ باستعمال المبرهنة (2-2-11) الخاصية (2)

A مجموعة مفتوحة من النمط -ii. $\Leftrightarrow A = Int_{ii}(A) \Leftrightarrow b_{ii}(A) = A\setminus Int_{ii}(A) = \phi$

5. بما ان $Int_{ii}(A)$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii ، باستعمال الخاصية (4) نحصل على

. $b_{ii}(Int_{ii}(A)) = \phi$

6. اذا كان $x \in Int_{ii}(b_{ii}(A))$ فإن $x \in b_{ii}(A)$ من جهة أخرى ، بما ان

$Int_{ii}(b_{ii}(A)) \subset Int_{ii}(A),\ b_{ii}(A) \subseteq A$ لذلك $x \in Int_{ii}(A) \cap b_{ii}(A)$ وهذا

يناقض (3) لذلك نستنتج ان $Int_{ii}(b_{ii}(A)) = \phi$.

7. باستعمال الخاصية (6) سوف نحصل

$b_{ii}(b_{ii}(A)) = b_{ii}(A)\setminus Int_{ii}(b_{ii}(A)) = b_{ii}(A)$

8. باستعمال المبرهنة (2-2-11) الخاصية (6) نحصل على :

$b_{ii}(A) = A\setminus Int_{ii}(A) = A\setminus(X\setminus cl_{ii}((X\setminus A)) = A \cap cl_{ii}(X\setminus A)$

9. بتطبيق الخاصية (8) مع المبرهنة (2-2-8) الخاصية (2) سوف نحصل على :

$b_{ii}(A) = A \cap Cl_{ii}(X\backslash A) = A \cap (X\backslash A) \cup D_{ii}(X\backslash A) = A \cap D_{ii}(X\backslash A)$.

بصورة عامة عكس الخاصية (1) من المبرهنة غير صحيحة كما في المثال الآتي:

لتكن $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

ليكن $A = \{a, b\}$ فان $b_{ii}(A) = \emptyset$ و $b(A) = \{a\}$ نستنتج أن $b(A) \not\subset b_{ii}(A)$

تعريف (2-2-25): ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً . ولتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X. فان حدود المجموعة من النمط -ii (*ii*-frontier of *A*) ونرمز له بالرمز $Fr_{ii}(A)$.

ويعرف بالشكل الآتي : $Fr_{ii}(A) = CL_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A)$

في المبرهنة الآتية نعطي عدداً من خواص حدود المجموعة من النمط -ii .

مبرهنة (2-2-26) : ليكن (X, τ^{ii}) فضاءً تبولوجياً. وليكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X. عندئذٍ العبارات الآتية صحيحة :

1. $Fr_{ii}(A) \subset Fr(A)$ إذ إن $Fr(A)$ تمثل حدود المجموعة A
2. $CL_{ii}(A) = Int_{ii}(A) \cup Fr_{ii}(A)$
3. $Int_{ii}(A) \cap Fr_{ii}(A) = \phi$
4. $b_{ii}(A) \subset Fr_{ii}(A)$
5. $Fr_{ii}(A) = b_{ii}(A) \cup D_{ii}(A)$
6. $Fr_{ii}(A) = D_{ii}(A)$ اذا وفقط اذا كان A مجموعة مفتوحة من النمط -ii .

7. $Fr_{ii}(A) = CL_{ii}(A) \cap CL_{ii}(X\backslash A)$

8. $Fr_{ii}(A) = Fr_{ii}(X\backslash A)$

9. $Fr_{ii}(A)$ هي مجموعة مغلقة من النمط $- ii$

10. $Fr_{ii}(Fr_{ii}(A)) \subset Fr_{ii}(A)$

11. $Fr_{ii}(Int_{ii}(A)) \subset Fr_{ii}(A)$

12. $Fr_{ii}(CL_{ii}(A)) \subset Fr_{ii}(A)$

13. $Int_{ii}(A) = A\backslash Fr_{ii}(A)$

البرهان: 1. بما ان $CL_{ii} \subseteq CL(A)$ و $Int(A) \subseteq Int_{ii}(A)$ هذا يؤدي إلى :

$$Fr_{ii}(A) = CL_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A) \subseteq CL(A)\backslash Int_{ii}(A) \subseteq CL(A)\backslash Int(A) \subseteq Fr(A)$$

2. $Int_{ii}(A) \cup Fr_{ii}(A)=Int_{ii}(A) \cup (CL_{ii}(A))\backslash Int_{ii}(A) = CL_{ii}(A)$

3. $Int_{ii}(A) \cap Fr_{ii}\ (A) = Int_{ii}(A) \cap (CL_{ii}(A))\backslash Int_{ii}(A) = \phi$

4. بما ان $A \subseteq CL_{ii}(A)$ سوف نحصل على

$$b_{ii}(A) = A\backslash Int_{ii}(A) \subseteq CL_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A) = Fr_{ii}(A)$$

5. بما أن $Int_{ii}(A) \cup Fr_{ii}(A) = Int_{ii}(A) \cup b_{ii}(A) \cup D_{ii}(A)$

$$Fr_{ii}(A) = b_{ii}(A) \cup D_{ii}(A)$$

6. نفرض ان A مجموعة مفتوحة من النمط -ii فان

$$Fr_{ii}(A) = b_{ii}(A) \cup (D_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A)) = \emptyset \cup (D_{ii}(A)\backslash A) =$$
$$D_{ii}(A)\backslash A = b_{ii}(X\backslash A)$$

باستعمال الخاصية (5) والمبرهنة (2-2-11) الخاصية (2) والمبرهنة (2-2-24) الخاصية (4) والخاصية (9) .

العكس: نفرض ان $Fr_{ii}(A) = b_{ii}(X\backslash A)$ فان $\emptyset = Fr_{ii}(A)\backslash b_{ii}(X\backslash A)$

$$= ((CL_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A)\backslash (X\backslash A)\backslash Int_{ii}(X\backslash A)) \; = \; A\backslash Int_{ii}(A)$$

باستعمال الخاصية (4) والخاصية (5) من المبرهنة (2-2-11) ولذلك $A \subseteq Int_{ii}\ (A)$. وبما ان $Int_{ii}\ (A) \subseteq A$ بصورة عامة هذا يؤدي إلى $Int_{ii}\ (A) = A$ باستعمال المبرهنة (2-2-11) الخاصية (2) نحصل على أن A مجموعة مفتوحة من النمط -ii .

7. $Fr_{ii}(A) = CL_{ii}(A)\backslash Int_{ii}(A) = CL_{ii}(A) \cap CL_{ii}(X\backslash A)$

8. البرهان مباشر باستعمال الخاصية (7)

9. $CL_{ii}(Fr_{ii}A) = CL_{ii}(CL_{ii}A) \cap (CL_{ii}(X\backslash A)$

$$\subset CL_{ii}\big(CL_{ii}(A)\big) \cap CL_{ii}(CL_{ii}(X\backslash A) = Fr_{ii}(A)$$

لذلك فان $F_{ii}(A)$ هو مجموعة مغلقة من النمط -ii

10. $Fr_{ii}\big(Fr_{ii}(A)\big) = \; CL_{ii}(Fr_{ii}(A)) \; \cap (CL_{ii}(X\backslash Fr_{ii}(A)) \subset CL_{ii}(Fr_{ii}(A)) = Fr_{ii}(A)$

11. باستعمال المبرهنة (2-2-11) الخاصية (3) نحصل على

$$Fr_{ii}\big(Int_{ii}(A)\big) = \; CL_{ii}\big(Int_{ii}(A)\big)\backslash\, Int_{ii}\big(Int_{ii}(A)\big) \subseteq \; CL_{ii}(A)\backslash\, Int_{ii}(A) = Fr_{ii}(A)$$

12. $Fr_{ii}(CL_{ii}(A)) = CL_{ii}\big(CL_{ii}(A)\big)\backslash Int_{ii}(CL_{ii}(A)) = CL_{ii}(A)\; Int_{ii}(CL_{ii}(A))$

$$= CL_{ii}(A)\backslash\, Int_{ii}(A) = Fr_{ii}(A)$$

13. $A\backslash Fr_{ii}(A) = (A\backslash CL_{ii}(A))\backslash (Int_{ii}(A)) = Int_{ii}(A)$

عكس الخاصية (1) والخاصية (4) من المبرهنة غير صحيح كما في المثال الآتي:

لتكن $X = \{a, b, c\}\,,\ \ \tau = \{\emptyset, X\ \{b\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \; \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

ليكن $A = \{c\}$ فإن $Fr(A) = \{a, c\} \not\subset \{c\} = Fr_{ii}(A)$

ليكن $B = \{a, b\}$ فإن $Fr_{ii}(B) = \{c\} \not\subset b_{ii}(B)$

الفصل الثالث

الاستمرارية للتطبيقات من النمط-ii

في الفضاءات التبولوجية

ii- Continuity mapping in Topological Spaces

(3-1): خواص الدوال المستمرة والمتشاكلة من النمط-ii

إن دراسة الأستمرارية والتشاكل للدوال بين الفضاءات التبولوجية هي مركز أهتمام الباحثين نشير إلى عدد منها والتي هي محور اهتمامنا [15]، [21]، [3]، [4]، [19]. من الآن فصاعداً نفرض أن (X,τ) و$(Y,\ \delta)$ فضاءين تبولوجيين وإن f تطبيقاً من (X,τ) إلى $(Y,\ \delta)$. في هذا البند سوف ندرس الاستمرارية من النمط–ii (*ii-continuity*) والتشاكلات التبولوجيا من النمط -ii (*ii-homeomorphism*) سوف نقوم بتوضيح العلاقة بين الاستمرارية من النمط -ii والاستمرارية (*continuity*) ، والاستمرارية من النمط -i (*i-continuity*) [30]، والاستمرارية من النمط–α (*α-continuity*) [4] على التوالي، كذلك بين التشاكل التبولوجي من النمط -ii (*ii-homeomorphism*) والتشاكل التبولوجي (*homeomorphism*) [7]، والتشاكل التبولوجي من النمط -i (*i-homeomorphism*) [30]، والتشاكل التبولوجي من النمط $\alpha -$ (*α-homeomorphism*) [18] على التوالي.

تعريف (3-1-1): التطبيق المفتوح من النمط -ii

يقال للتطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ أنه مفتوح من النمط -ii (*ii-open mapping*) اذا كانت الصورة $f(G)$ مفتوحة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لأي مجموعة مفتوحة G في الفضاء التبولوجي(X,τ). بمعنى ان f تنقل مجموعة مفتوحة الى مجموعة مفتوحة من النمط ii.

تعريف(3-1-2) : التطبيق المستمر من النمط-ii

التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ مستمر من النمط -ii اذا وفقط اذا كانت $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii في (X,τ) لكل مجموعة مفتوحة G في (Y,δ) .

تعريف(3-1-3): **التشاكل من النمط** -*ii*

يقال للتطبيق $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ أنه تشاكل تبولوجي من النمط -*ii* (*Topological ii-homeomorphism*) اذا كان:

1. مستمر من النمط -*ii* 2. تقابلي (متباين ، شامل) 3. مفتوح من النمط -*ii*

قضية (3-1-4): إذا كان f مستمراً فإنه f مستمراً من النمط–*ii*.

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ تطبيقاً مستمراً عندئذٍ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X لأي مجموعة مفتوحة G في Y وحسب القضية (2-1-21) نحصل على $f^{-1}(G)$ مفتوحة من النمط -*ii* في X وحسب التعريف (3-1-2) نحصل على ان f مستمرة من النمط -*ii* . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي :

مثال (3-1-5) : لتكن $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $X=Y=\{a,b,c,d\}$

فإن $\delta=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,d\},\{a,b,d\}\}$

$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta).\qquad f(\mathrm{a})=a,\ \ f(b)=b,\ \ f(c)=c,\ \ f(d)=d$

$\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,c\}\{a,b,d\}\}$

التطبيق f ليس مستمراً لأن $\{a,b,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء البتولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}\{a,b,d\}=\{a,b,d\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) . كذلك $\{a,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}\{a,d\}=\{a,d\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) . التطبيق f مستمر من النمط -*ii* حسب تعريف (3-1-2) نستنتج ان التطبيق f مستمر من النمط -*ii* لكن ليس مستمراً.

قضية(3-1-6): إذا كان f مستمراً من النمط‒ii فإنه f مستمراً من النمط‒i .

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تطبيقاً مستمراً من النمط -ii حسب تعريف(3-1-2).

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii في X. وحسب الملاحظة (2-1-17) نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -i في X. وحسب التعريف (1-3-1) نحصل على أن f مستمرة من النمط ‒i . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-7): لتكن $\tau=\{\emptyset,X,\{3,4\},\{1\},\{1,3,4\}\}$ ، $X=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{Y}=\{5,6\}$ $\quad\delta=\{\emptyset,Y,\{6\}\}$

$f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$. $\quad f(1)=f(2)=f(4)=5,\quad f(3)=6$

$$\tau^{i}=\left\{\begin{matrix}\emptyset,X,\{3,4\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1\},\\ \{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}\end{matrix}\right\}$$

$$\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{3,4\},\{1,3,4\},\{1\},\{1,2\}\}$$

التطبيق f ليس مستمراً من النمط -ii لأن $\{6\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}(\{6\})=\{3\}$ ليست مجموعة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي (X,τ). التطبيق f مستمر من النمط -i حسب التعريف (1-3-1) نستنتج ان التطبيق f مستمر من النمط -i لكن ليس مستمر من النمط -ii .

قضية (3-1-8): إذا كان f مستمراً من النمط‒α فإنه f مستمر من النمط‒ii .

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تطبيقاً مستمراً من النمط $\alpha-$ حسب التعريف (1-3-1) فإن لأي مجموعة مفتوحة *G* في *Y* نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha-$ في X . وحسب المبرهنة (2-1-24) نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في X. وحسب التعريف (3-1-2) نحصل على ان *f* مستمرة من النمط -*ii* . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-9): لتكن $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $X=Y=\{a,b,c,d\}$

$\delta=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,d\},\{b,d\}\}$

فإن $\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{a,b,c\}\}$

$\tau^{\alpha}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$

$f:(X,\tau)\to(Y,\delta),\ \ f(a)=a,\ \ f(b)=b,\ \ f(c)=c,\ \ f(d)=d$

التطبيق *f* ليس مستمر من النمط $\alpha-$ لأن $\{b,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}(\{b,d\})=\{b,d\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha-$ في الفضاء التبولوجي (X,τ) . التطبيق *f* مستمر من النمط -*ii* حسب تعريف (3-1-2) نستنتج ان التطبيق *f* مستمر من النمط -*ii* لكن ليس مستمر من النمط $\alpha-$.

تعريف(3-1-10): **التطبيق المفتوح من النمط-*Int***

يقال التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ أنه مفتوح من النمط -*Int* (*Int-open mapping*) اذا كانت لكل مجموعة مفتوحة *A* في الفضاء التبولوجي (X,τ) فإن الصورة *f(A)* مجموعة مفتوحة من النمط–*Int* في الفضاء التبولوجي (Y,δ).

نتيجة(3-1-11) : يُقال للتطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ أنه مفتوح من النمط–*Int* إذا كانت لكل مجموعة مفتوحة *G* في الفضاء التبولوجي (X,τ) وحسب المبرهنة (كل مجموعة مفتوحة

هي مجموعة مفتوحة من النمط–*Int*) فإن الصورة *f (G)* مجموعة مفتوحة من النمط–*Int* في الفضاء التبولوجي (Y,δ) .

تعريف (3-1-12): **التطبيق المستمر من النمط-*Int***

يُقال للتطبيق $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ أنه مستمر من النمط–*Int* إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط– *Int* في (X,τ) لكل مجموعة مفتوحة *G* في (Y,δ).

تعريف(3-1-13): **التشاكل من النمط -*Int***

يقال للتطبيق $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ أنه تشاكل تبولوجي من النمط -*Int* (*topological Int-homeomorphism*) اذا كان :

1. مستمر من النمط -*Int* 2. تقابلي (متباين ، شامل) 3. مفتوح من النمط -*Int*

قضية (3-1-14): إذا كان *f* مستمراً فإن *f* مستمراً من النمط–*Int*

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ تطبيقاً مستمراً عندئذٍ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في *X* لأي مجموعة مفتوحة *G* في *Y*. وحسب الخاصية (كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط -*Int*) نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -*Int* في *X* وحسب التعريف (3-1-12) نحصل على ان *f* مستمرة من النمط -*Int* . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-15): لتكن $X=Y=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}$

$\delta = \{\emptyset, \mathrm{Y}, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}\}$

فإن $\tau^{int} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$f: (X,\tau) \to (Y, \delta),\ \ f(a) = a,\ \ f(b) = b,\ \ f(c) = c$

التطبيق f ليس مستمراً لأن $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن

$f^{-1}(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) . التطبيق f مستمر من النمط -*Int* حسب التعريف (3-1-12). نستنتج ان التطبيق f مستمر من النمط -*Int* لكن ليس مستمراً.

قضية (3-1-16): إذا كان f مستمراً من النمط−*ii* فإن f مستمراً من النمط−*Int* .

البرهان : ليكن $f: (\mathrm{X},\tau) \to (Y,\delta)$ تطبيق مستمر من النمط -*ii* حسب التعريف (3-1-2) لتكن G مجموعة مفتوحة في Y نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في X وحسب الملاحظة (2-1-19) نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -*Int* .
وحسب تعريف (3-1-12) نحصل على ان f مستمرة من النمط -*Int* .

قضية (3-1-17) : إذا كان f مستمراً من النمط−α فإن f مستمراً من النمط−*Int* .

البرهان : ليكن $f: (\mathrm{X},\tau) \to (Y,\delta)$ تطبيق مستمر من النمط $-\alpha$ حسب التعريف (1-3-1) لتكن G مجموعة مفتوحة في Y نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ في X وحسب نتيجة (2-1-28) نحصل على ان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -*Int* لأي مجموعة مفتوحة G في Y. وحسب التعريف (3-1-12) نحصل على ان f مستمرة من النمط -*Int* . ■

عكس القضية (3-1-16) (3-1-17) غير صحيح كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-18): لتكن $Y = X = \{a,b,c\} \quad , \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{a,c\}\}$

فإن $\tau^{int} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\} = \tau^{ii}$

$f: (X,\tau) \to (Y,\delta)\,, \ \ f(a) = a, \ \ f(b) = b, \ \ f(c) = c$

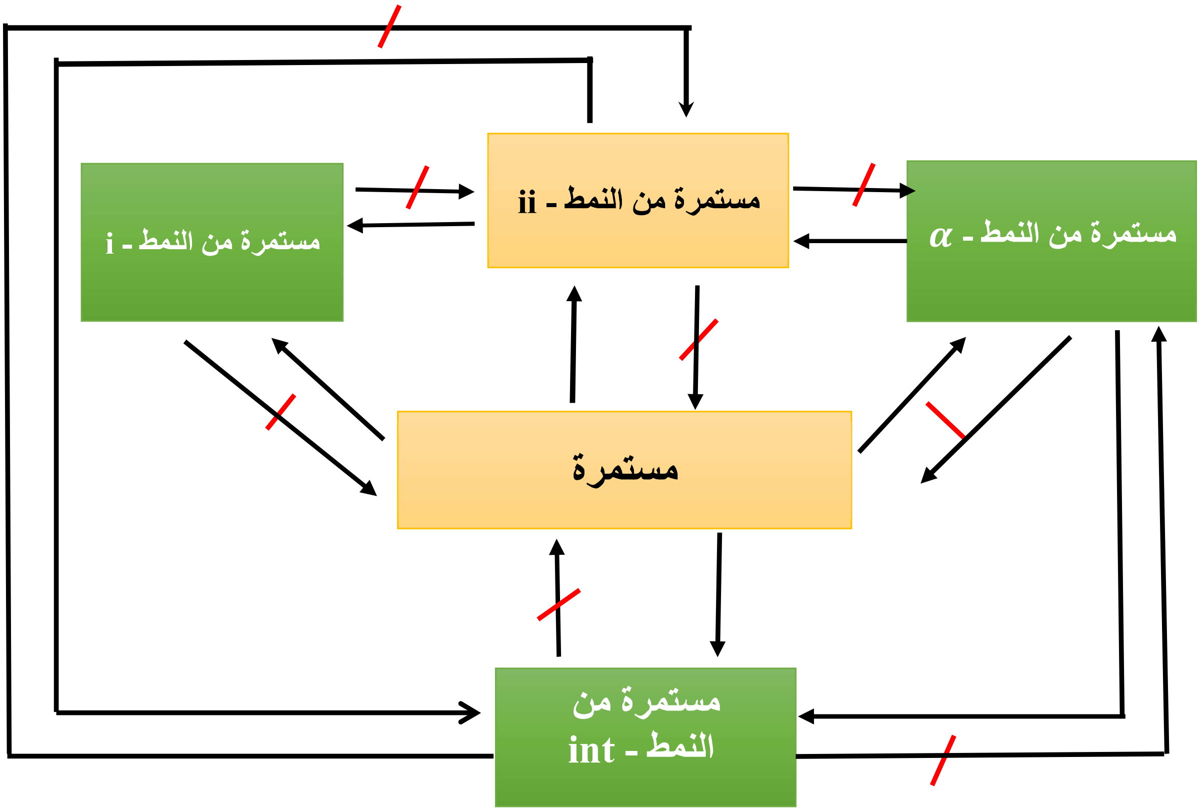
التطبيق f ليس مستمر من النمط -*ii* لأن $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في الفضاء التبولوجي (X,τ). التطبيق f مستمر من النمط -*Int* حسب تعريف (3-1-12). نستنتج ان التطبيق f مستمر من النمط -*Int* لكن ليس مستمر من النمط -*ii* . التطبيق f ليس مستمر من النمط $-\alpha$ لأن $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) لكن $f^{-1}(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ في الفضاء التبولوجي (X,τ) .

التطبيق f مستمر من النمط -*Int* حسب تعريف (3-1-12). نستنتج ان التطبيق f مستمر من النمط -*Int* لكن ليس مستمر من النمط $-\alpha$.

نتيجة (3-1-19): التطبيق f مستمر من النمط$-\alpha$ إذا وفقط إذا كانت f ضعيفة مستمرة من النمط-*ii*.

البرهان: مباشر باستعمال المبرهنة (2-2-22) .

ملاحظة (3-1-20): مما تقدم نحصل على المخطط الآتي :



قضية (3-1-21): إذا كان f تطبيق مفتوح فإن f مفتوح من النمط$-ii$.

البرهان: ليكن $(X,\tau) \to (Y,\delta)$: تطبيقاً مفتوحاً. لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) نحصل على ان $f(G)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) (حسب الفرض). وحسب القضية (2-1-21) نحصل على ان $f(G)$ مفتوحة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي (Y,δ) . نستنتج ان f تطبيق مفتوح من النمط -ii . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي :

مثال (3-1-22) : لتكن $Y = X = \{1,2,3\}\ ,\ \tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{1,2\}\}$

فإن $\delta^{ii} = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

$f : (X,\tau) \to (Y,\delta)\ ,\ f(1) = 2,\quad f(2) = 3\ ,\quad f(3) = 1$

التطبيق f ليس مفتوحاً لأن $\{1,2\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f\ \{1,2\} = \{2,3\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ). التطبيق f مفتوح من النمط -*ii* حسب التعريف (3-1-1). نستنتج أن التطبيق f مفتوح من النمط -*ii* لكن ليس مفتوحاً.

قضية(3-1-23) : إذا كان f تطبيق مفتوح من النمط$-ii$ فإن f مفتوح من النمط$-i$.

البرهان : ليكن $f : (X,\tau) \to (Y,\delta)$ تطبيق مفتوح من النمط -*ii* لتكن *G* مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) نحصل على ان *f (G)* مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في الفضاء التبولوجي (Y,δ) (حسب الفرض) . وحسب الملاحظة (2-1-17) نحصل على ان *f(G)* مفتوحة من النمط -*i* في الفضاء التبولوجي (Y,δ) . نستنتج ان f تطبيق مفتوح من النمط -*i*.■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-24): لتكن $X = y = \{1,2,3\}\ ,\ \tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{1,2\}\}$

$f : (X,\tau) \to (Y,\delta)\ ,\quad f(1) = 1,\ f(2) = 3\ ,\ f(3) = 2$

$\delta^{i} = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{1,2\}, \{1\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\delta^{ii} = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

التطبيق f ليس مفتوح من النمط -*ii* لأن $\{1, 2\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X, τ) لكن $f(\{1,2\}) = \{1,3\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في الفضاء التبولوجي (Y, δ).

التطبيق f مفتوح من النمط *i* حسب التعريف (1-3-1) نستنتج ان التطبيق f مفتوح من النمط -*i* لكن ليس مفتوح من النمط -*ii* .

قضية (3-1-25): إذا كان f تطبيق مفتوح من النمط −α فإن f مفتوح من النمط−*ii*.

البرهان : ليكن $f: (X, \tau) \to (Y, \delta)$ تطبيق مفتوح من النمط $- \alpha$ لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X, τ) نحصل على ان *f (G)* مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha$ في الفضاء التبولوجي (Y, δ) وحسب المبرهنة (2-1-24) نحصل على ان *f (G)* مجموعة مفتوحة من النمط -*ii* في الفضاء التبولوجي (Y, δ) نستنتج ان f تطبيق مفتوح من النمط -*ii*.■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي :

مثال *(3-1-26):* لتكن $Y = X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}, \{a, b, d\}, \{b, d\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

فإن $\delta^{ii} = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$\delta^{\alpha} = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$f: (X, \tau) \to (Y, \delta), \ f(a) = a, \ f(b) = b, \ f(c) = c, \ f(d) = d$

التطبيق f ليس مفتوح من النمط -α لأن $\{b,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{b,d\}) = \{b,d\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط - α في الفضاء التبولوجي (Y,δ). التطبيق f مفتوح من النمط -ii حسب تعريف (3-1-1) نستنتج ان التطبيق f مفتوح من النمط -ii لكن ليس مفتوح من النمط -α .

قضية (3-1-27): إذا كان f تطبيقاً مفتوحاً فإن f مفتوحاً من النمط$-Int$.

البرهان : ليكن $f:(X,\tau) \to (Y,\delta)$ تطبيقاً مفتوحاً لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) نحصل على ان $f(G)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ) (حسب الفرض) وحسب الخاصية (كل مجموعة مفتوحة هي مفتوحة من النمط -Int) نحصل على ان $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -Int في الفضاء التبولوجي (Y,δ) . نستنتج ان f تطبيق مفتوح من النمط -Int . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي :

مثال (3-1-28): لتكن $X = Y = \{1,2,3\},\quad \tau = \{\emptyset,\ X,\{1,2\}\}$

$\delta = \{\emptyset,\ Y,\{2\},\{1,2\}\}$

$f:(X,\tau) \to (Y,\delta)\ ,\ \ f(1) = 2,\ \ f(2) = 3,\ \ f(3) = 1$

$\delta^{int} = \{\emptyset, Y,\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$

التطبيق f ليس مفتوحاً لأن $\{1,2\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{1,2\}) = \{2,3\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي(Y,δ) . التطبيق f مفتوح من النمط -Int حسب نتيجة (3-1-11) نستنتج بأن التطبيق f مفتوح من النمط -Int لكن ليس مفتوحاً.

قضية (3-1-29): إذا كان f تطبيقاً مفتوحاً من النمط-ii فإن f مفتوحاً من النمط-Int .

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تطبيق مفتوح من النمط -ii لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) نحصل على أن $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي (Y,δ) (حسب الفرض) وحسب الملاحظة (2-1-19) نحصل على ان $f(G)$ مفتوحة من النمط -Int في الفضاء التبولوجي (Y,δ) . نستنتج ان f تطبيق مفتوح من النمط -Int . ■

قضية (3-1-30) : إذا كان f تطبيقاً مفتوحاً من النمط-α فإن f مفتوحاً من النمط-Int .

البرهان : ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تطبيق مفتوح من النمط -α لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) نحصل على ان $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -α في الفضاء التبولوجي (Y,δ) (حسب الفرض) وحسب النتيجة (2-1-28) نحصل على ان $f(G)$ مجموعة مفتوحة من النمط -Int في الفضاء التبولوجي (Y,δ). نستنتج أن f تطبيق مفتوحة من النمط -Int .■

عكس القضية (3-1-29) و (3-1-30) غير صحيح كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-31): لتكن $Y=X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$

$$\delta=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b,c\}\}$$

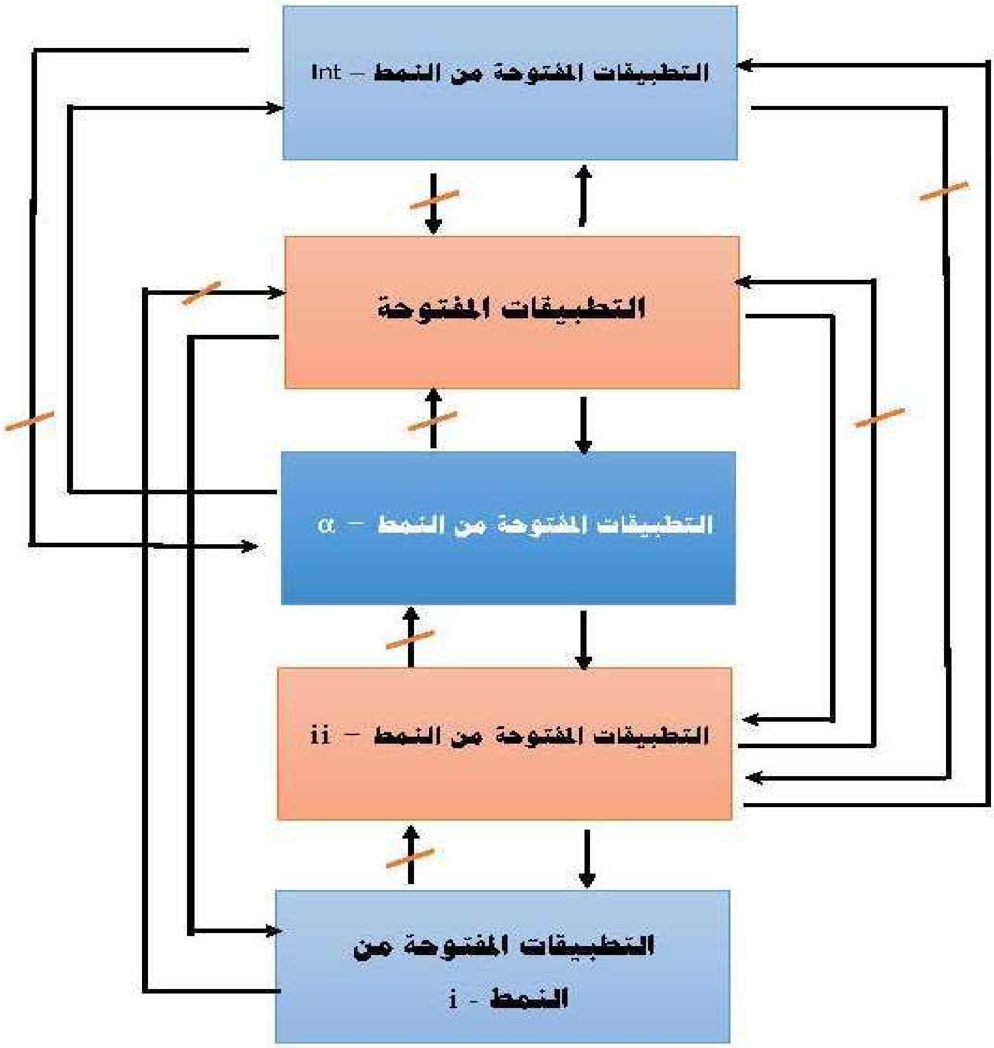
$$f:(X,\tau)\to(Y,\delta),\ f(a)=a,\ f(b)=b,\ f(c)=c,\ f(d)=d$$

فإن $\delta^{int}=\{\emptyset,Y,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

$$\delta^{\alpha}=\delta^{ii}=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b,c\}\}$$

التطبيق f ليس مفتوح من النمط -ii لأن $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{a,c\})=\{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي (Y,δ). التطبيق f مفتوح من النمط -Int حسب نتيجة (3-1-11) نستنتج ان التطبيق f مفتوح من النمط -Int لكن ليس مفتوح من النمط -ii . التطبيق f ليس مفتوح من النمط- α لأن $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{a,c\})=\{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط – α في الفضاء التبولوجي (Y,δ). التطبيق f مفتوح من النمط -Int حسب نتيجة (3-1-11) نستنتج ان التطبيق f مفتوح من النمط -Int لكن ليس مفتوح من النمط -α.

ملاحظة (*3-1-32*): مما تقدم نحصل على المخطط الآتي:



قضية (*3-1-33*) : إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط-ii.

البرهان: ليكن $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)$ تشاكلاً تبولوجياً. حسب تعريف التشاكل التبولوجي نحصل على أن التطبيق f يحقق الشروط الآتية:

1. مستمر
2. تقابلي (شامل، متباين)
3. مفتوح

حسب القضية $(3-1-4)$ فإن التطبيق f مستمر من النمط $-$ ii. حسب القضية $(3-1-21)$ فإن التطبيق f مفتوح من النمط $-$ ii . نستنتج أن f تشاكل تبولوجي من النمط $-$ ii .■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (*3-1-34*): لتكن $Y=X=\{a,b,c\}\ ,\quad \tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$

$\delta=\{\emptyset,Y,\{a\}\}$

$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\delta)\ ,\ \ f(a)=a,\ \ f(b)=b,\ \ f(c)=c$

فإن $\tau^{ii}=\{\emptyset,Y,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau^{ii}=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\},\{a,b\}\}$

التطبيق f متباين لأنه $\forall\ {}_2 \neq {}_1$ نحصل على $f(x_1)\neq f(x_2)$. التطبيق f شامل لأنه $f(x)=y$. نستنتج أن التطبيق f تقابلي. التطبيق f ليس مفتوح لأن مجموعة $\{a,c\}$ مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{a,c\})=\{a,c\}$ ليست مفتوحة في الفضاء التبولوجي (Y,δ). نستنتج أن f ليس تشاكلاً تبولوجياً. التطبيق f مستمر من النمط -ii حسب تعريف $(3-1-1)$. التطبيق f مفتوح من النمط$-$ ii حسب نتيجة (*3-1-11*). نستنتج أن f تشاكل تبولوجي من النمط$-$ ii لكن ليس تشاكلاً تبولوجياً.

قضية (3-1-35): إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-ii$ فإن f تشاكلاً تبولوجيا من النمط$-i$.

البرهان : ليكن $f:(\mathrm{X},\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-ii$. حسب تعريف التشاكل التبولوجي من النمط $-ii$ نحصل على أن التطبيق f يحقق الشروط الآتية:

1. مستمر من النمط $-ii$ 2. تقابلي (شامل ، متباين) 3. مفتوح من النمط $-ii$

حسب القضية (3-1-6) فان التطبيق f مستمر من النمط $-i$. حسب القضية (3-1-23)) فان التطبيق f مفتوح من النمط $-i$. نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $-i$.■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-36): لتكن $X=Y=\{1,2,3\}\quad,\tau=\{\phi\,,\ X,\{1,2\}\}$

$$\delta=\{\emptyset,\ \ Y\,,\{1\}\,\}$$

$$f:(\mathrm{X},\tau)\to(Y,\delta)\ \ ,f(1)=1\,,\qquad f(2)=3,\qquad f(3)=2$$

فإن

$$\tau^{i}=\{\emptyset,\ \ X,\{1,2\},\{1\},\{2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

$$\tau^{ii}=\{\emptyset,\ \ X,\{1,2\},\{2\},\{2,3\}\}$$

$$\tau^{ii}=\tau^{i}=\{\emptyset,\ \ Y,\ \ \{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$$

التطبيق f ليست مستمر من النمط $-ii$ لان $\{1\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي(Y,δ).

لكن $\{1\}=(\{1\})$ f^{-1} ليست مفتوحة من النمط - ii في الفضاء التبولوجي (X,τ).

التطبيق f متباين لانه $\forall\ x_1\neq x_2$ نحصل على $f(x_1)\neq f(x_2)$. التطبيق f شامل لانه $f(x)=y$. نستنتج ان التطبيق f تقابلي. ونستنتج ان f ليس تشاكل تبولوجي من النمط - ii.

التطبيق f مستمر من النمط $i-$ حسب تعريف (1-3-1). التطبيق f مفتوح من النمط $i-$ حسب تعريف (3-3-1). نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $i-$ لكن ليس تشاكل تبولوجي من النمط - ii.

قضية (3-1-37): إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط $-\alpha$ فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط $-ii$.

البرهان: ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكلاً تبولوجياً من النمط $-\alpha$. حسب تعريف التشاكل التبولوجي من النمط $-\alpha$ نحصل على أن التطبيق f يحقق الشروط الآتية:

1. مستمر من النمط $\alpha-$ 2. تقابلي (شامل ، متباين) 3. مفتوح من النمط $\alpha-$

حسب القضية (3-1-8) فان التطبيق f مستمر من النمط $ii-$. حسب القضية (3-1-25) فان التطبيق f مفتوح من النمط $ii-$. نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $ii-$.■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-38): لتكن $Y=X=\{a,b,c,d\}$

$$\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{\{a,b\},\{a,b,d\},\{b,d\}\}$$

$$\delta=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

فإن

$$\tau^{ii}=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$$

$$\tau^{\alpha}=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$$

$$f:(X,\tau)\to(Y,\delta),\ \ f(a)=a,\ \ f(b)=b,\ \ f(c)=c,\ \ f(d)=d$$

التطبيق f ليس مفتوح من النمط -α لأن $\{b,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{b,d\})=\{b,d\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط - α في الفضاء التبولوجي (Y,δ). التطبيق f مفتوح من النمط -ii حسب تعريف (3-1-1) نستنتج ان التطبيق f مفتوح من النمط -ii لكن ليس مفتوح من النمط -α . التطبيق f مستمر من النمط$-ii$ لذلك فإن التطبيقf هو تشاكل تبولوجي من النمط$-ii$ ولكن التطبيق f ليس تشاكل تبولوجي من النمط$-\alpha$.

قضية (3-1-39): إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-Int$.

البرهان: ليكن $f:(\mathrm{X},\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكلا تبولوجيا حسب تعريف التشاكل التبولوجي

نحصل على ان f يحقق الشروط الآتية:

1. مستمر. 2 .تقابلي (شامل ، متباين). 3. مفتوح

حسب القضية(3-1-14) فان التطبيق f مستمر من النمط $-Int$. حسب القضية (3-1-27) فان التطبيق f مفتوح من النمط $-Int$. نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $-Int$. ■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-40): لتكن $X=Y=\{a,b,c\},\quad \tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$

$\delta=\{\emptyset\,,Y,\ \{a\}\}$

$f:(\mathrm{X},\tau)\to(Y,\delta)\ ,f(a)=a,\qquad f(b)=b,\qquad f(c)=c$

فإن $\tau^{int}=\{\emptyset\,,\ X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau^{int}=\{\emptyset\,,Y,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

التطبيق f ليس مفتوحا لان $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكن $f(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من الفضاء التبولوجي (Y,δ).

التطبيق f متباين لأنه $\forall \ _1 \neq \ _2$ نحصل على $f(x_1) \neq f(x_2)$. التطبيق f شامل لأنه $f(x) = y$. نستنتج أن التطبيق f تقابلي. نستنتج ان f ليس تشاكلا تبولوجيا. التطبيق f مستمر من النمط $- Int$ حسب تعريف (3-1-12). التطبيق f مفتوح من النمط $- Int$ حسب نتيجة(3-1-11). نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $- Int$ لكن ليس تشاكل تبولوجي .■

قضية (3-1-41) : إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-ii$ فإن f تشاكلا تبولوجياً من النمط$-Int$.

البرهان: ليكن $f: (X,\tau) \to (Y,\delta)$ هو تشاكل من النمط - ii حسب تعريف التشاكل التبولوجي من النمط - ii فإن f تحقق الشروط الآتية:

1. مستمر من النمط - ii
2. تقابلي (شامل ، متباين)
3. مفتوح من النمط $- ii$

حسب القضية (3-1-16) نحصل على أن التطبيق f مستمر في النمط $- Int$ حسب القضية(3-1-29) نحصل على أن التطبيق f مفتوح من النمط$- Int$. نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط $- Int$.■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-42) : لتكن $X = Y = \{a,b,c\}, \quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b,c\}\}$

$f:(X,\tau) \to (Y,\delta)\,, f(a)=a, \quad f(b)=b, \quad f(c)=c$

فإن $\tau^{ii}=\{\emptyset,\ X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau^{int}=\{\emptyset\,,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau^{ii}=\{\emptyset\,,Y,\{a\},\{b,c\}\}$

$\tau^{int}=\{\emptyset\,,Y,\{a\},\{a,c\},\{a,b\}\}$

التطبيقfمتباين لأنه $\forall\, x_1 \neq x_2$ نحصل على $f(x_1)\neq f(x_2)$. التطبيق f شامل لانه $f(x)=y$ نستنتج ان التطبيق f تقابلي. التطبيق f ليس مفتوحا من النمط - ii لان $\{a,b\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X\,,\tau)$ لكن $f\,(\{a,b\})\ =\ \{a,b\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط -ii من الفضاء التبولوجي (Y,δ). نستنتج ان f ليس تشاكل تبولوجي من النمط $-\ ii$. التطبيق f مستمر من النمط $-\ Int$ حسب التعريف(3-1-12). التطبيق f مفتوح من النمط $-\ Int$ حسب نتيجة (3-1-11). نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط - Int لكن ليس تشاكل تبولوجي من النمط - ii . ■

قضية(3-1-43): إذا كان f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-\alpha$ فإن f تشاكلاً تبولوجياً من النمط$-$ Int .

البرهان: ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكلاً تبولوجيا من النمط $-\ \alpha$ حسب تعريف التشاكل التبولوجي من النمط $-\ \alpha$ نحصل على ان التطبيق f يحقق الشروط الآتية:

1. مستمر من النمط $-\ \alpha$
2. تقابلي (شامل، متباين)
3. مفتوح من النمط $-\ \alpha$

حسب القضية (3-1-17) نحصل على ان التطبيق f مستمر من النمط – Int .

حسب القضية (3-1-30) نحصل على ان التطبيق f مفتوح من النمط – *Int*. نستنتج بان f تشاكل تبولوجي من النمط - *Int*. ■

عكس هذه القضية غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-1-44): لتكن $Y = X = \{a, b, c\ , d\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{\ \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{b, d\}\}$

$\delta = \{\emptyset, Y\ , \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

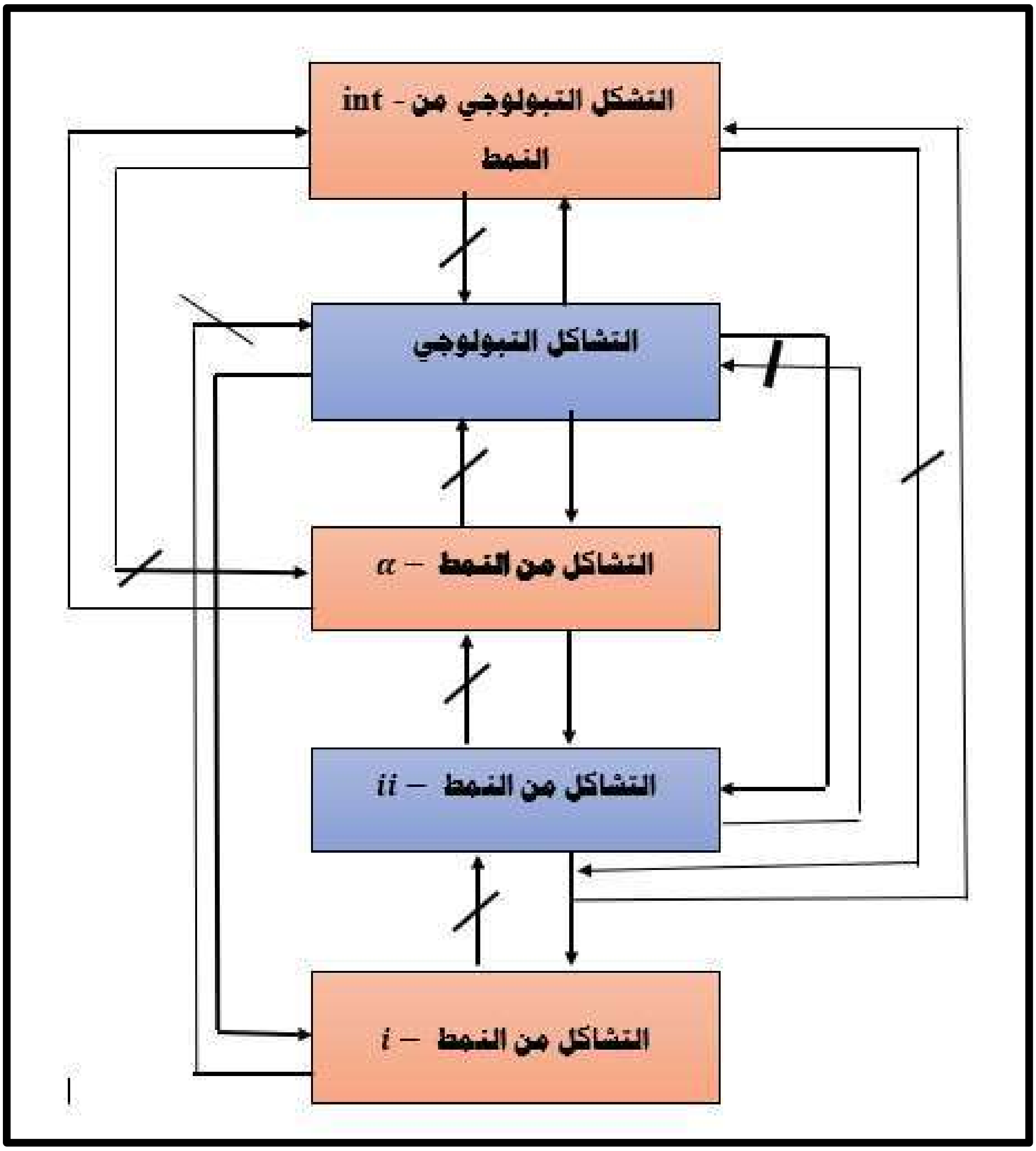
فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$\tau^{\alpha} = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

$f: (X, \tau) \to (Y, \delta)\ ,\ \ f(a) = a,\ \ f(b) = b,\ \ f\ (c) = c,\ \ f(d) = d$

التطبيق f متباين لأنه $\forall\ x_1 \neq x_2$ نحصل على $f(x_1) \neq f(x_2)$. التطبيق f شامل لان $f(x) = y$. نستنتج بان f تقابلي. التطبيق f ليست مفتوحا من النمط – α لان $\{b,d\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X, τ) لكن $f(\{b,d\}) = \{b,d\}$ ليست مفتوحة من لنمط – α في الفضاء التبولوجي (Y, δ). نستنتج ان f ليس تشاكل تبولوجي من النمط – α. التطبيق f مستمر من النمط – *Int* حسب التعريف *(3-1-12)*. التطبيق f مفتوح من النمط – *Int* حسب نتيجة (3-1-11). نستنتج ان f تشاكل تبولوجي من النمط – *Int* لكن ليس تشاكل تبولوجي من النمط – α.

ملاحظة (3-1-45): مما تقدم نحصل على المخطط الآتي:



(2-3): المجاميع المغلقة من النمط $iiw-$ في الفضاء التبولوجي.

سن دارام وشيك جوهان عام (2000) [17] قدما المجموعة المغلقة من النمط$-$ w (w-closed set) في الفضاء التبولوجي (X,τ) وهذا النوع من المجاميع حاز على اهتمام العديد من الباحثين ومن ضمنهم الباحث باري مالا عام (2017) [13] حيث قدم المجاميع المغلقة من النمط$-$ αw (αw-closed set) وعلى هذا المنوال درسنا المجاميع المغلقة من النمط$-w$ باستعمال تعريف المجاميع المغلقة من النمط$-ii$ وحصلنا على المجموعة التي أسميناها بالمجموعة المغلقة من النمط$-iiw$ (iiw-closed set). إذ قمنا بدراسة عدد من خواصها وصفاتها عن طريق مجموعة من المبرهنات والأمثلة التي حصلنا عليها. كذلك قدمنا في هذا البند توضيح العلاقة بين المجاميع المغلقة من النمط$-iiw$ والمجاميع المغلقة من النمط$-iw$ (iw-closed set) والمجاميع المغلقة من النمط$-\alpha w$ معززة بعدد من الأمثلة.

تعريف (3-2-1) : المجاميع المغلقة من النمط$-iw$

يقال للمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنها مجموعة مغلقة من النمط$-iw$ (iw-closed set) إذا كان $wCL\ (A) \subseteq G$ عندما $A \subseteq G$ و G هي مجموعة مفتوحة من النمط$-i$ في (X,τ). متممة المجموعة المغلقة من النمط$-iw$ تسمى مجموعة مفتوحة من النمط$-iw$. سوف نرمز لعائلة المجاميع المغلقة من النمط$-iw$ في الفضاء التبولوجي بالرمز $iwc\ (X,\tau)$.

مثال (3-2-2) : لتكن $X=\{a,b,c\},\quad \tau=\{\emptyset,X,\{b\},\{b,c\}\}$

فإن $C(\tau)=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$

$$\tau^i=\{\emptyset,X,\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

$$\tau^S=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

الآن المجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{a\}$ هي $\{a,b\}$ ، X

$$\mathrm{CL}(\{a\})=\{a\}\subseteq\{a,b\},X$$

مما تقدم $\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط$-$ w

والمجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{b\}$ هي $\{b\}$ ، $\{a,b\}$ ، $\{b,c\}$، X

$CL(\{b\}) = X \nsubseteq \{a,b\},\{b,c\}$

لذلك فإن $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط– w

والمجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{c\}$ هي $\{b,c\}$، X

$CL(\{c\}) = \{a,c\} \nsubseteq \{b,c\}$

مما تقدم $\{c\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط– w

وبالطريقة نفسها نحصل على المجاميع المغلقة من النمط– w هي :

$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

الآن المجاميع المفتوحة من النمط– i التي تحتوي على $\{a\}$ هي $\{a,b\}, \{a,c\}$ ، X

$wCL(\{a\}) = \{a\} \subseteq \{a,b\},\{a,c\},X$

مما تقدم $\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط– iw

والمجاميع المفتوحة من النمط–i التي تحتوي على $\{b\}$ هي $\{b\}$ ، $\{a,b\}$ ، $\{b,c\}$، X

$wCL(\{b\}) = X \nsubseteq \{a,b\},\{b,c\},\{b\}$

نحصل على $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط– iw

والمجاميع المفتوحة من النمط– i التي تحتوي على $\{c\}$ هي $\{a,c\}, \{c\}, \{b,c\}$، X

$wCL(\{c\}) = \{a,c\} \nsubseteq \{b,c\},\{c\}$

إذاً $\{c\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط– iw

وبالطريقة نفسها نحصل على

iwc $(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

مبرهنة (3-2-3): كل مجموعة مغلقة من النمط $iw -$ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط $w -$.

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي وان $A \subseteq X$ هي أية مجموعة مغلقة من النمط $iw -$ و G هي مجموعة شبه مفتوحة في X بحيث ان $A \subseteq G$. بما أن كل مجموعة شبه مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط $i -$ حسب نتيجة (1-2-109)، وبما أن مجموعة مغلقة لذلك $wCL\ (A) \subseteq CL\ (A) \subseteq G$. هذا يثبت ان A مجموعة مغلقة من النمط $w -$ في (X,τ).

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-2-4): ليكن $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, x, \{a\}, \{b,c\}\}$

$c(\tau) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$

$\tau^i = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^s = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

الآن المجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على *{a}* هي *{a}* و X وان:

$CL\ (\{a\}) = \{a\} \subseteq \{a\}, X$

مما تقدم *{a}* مجموعة مغلقة من النمط $w -$

المجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على *{b}* هي X و *{b,c}* وان

$CL\ (\{b\}) = \{b,c\} \subseteq \{b,c\}, X$

لذلك فإن $\{b\}$ مجموعة مغلقة من النمط $w -$.

المجاميع شبه المفتوحة التي تحتوي على $\{c\}$ هي $\{b,c\}$ و X .

وان $CL\ (\{c\}) = \{b,c\} \subseteq \{b,c\}, X$

إذاً $\{c\}$ مجموعة مغلقة من النمط $- w$.

وبالطريقة نفسها نحصل على المجاميع المغلقة من النمط$- w$ هي:

$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$

الآن المجاميع المفتوحة من النمط $- i$ التي تحتوي على $\{a\}$ هي $\{a\}$ و X وان:

$wCL\ (\{a\}) = \{a\} \subseteq \{a\}, X$

مما تقدم $\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط $- iw$

الآن المجاميع المفتوحة من النمط $- i$ التي تحتوي على $\{b\}$ هي $\{b\}$ و $\{b,c\}$ وX

$wCL\ (\{b\}) = \{b\} \subseteq \{b\}, \{b,c\}, X$

إذاً $\{b\}$ مجموعة مغلقة من النمط $- iw$ وبالطريقة نفسها نحصل على:

$iwc\ (X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

نلاحظ ان $A = \{a,c\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط $- w$، لكن A ليست مجموعة مغلقة من النمط $- iw$.

مبرهنة (3−2−5): كل مجموعة مغلقة من النمط $- iw$ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط $- \alpha w$.

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي وان $A \subseteq X$ هي اي مجموعة مغلقة من النمط $- iw$ و G هي مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha$ في X بحيث ان $A \subseteq G$. بما ان

كل مجموعة مفتوحة من النمط $-\alpha$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $-i$ حسب نتيجة(1−2−10) وبما ان A هي مجموعة مغلقة لذلك $wCL\ (A) \subseteq CL(A) \subseteq G$. هذا يثبت ان A مجموعة مغلقة من النمط $-\alpha w$ في (X,τ).■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3−2−6): ليكن $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\}$

$c(\tau) = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{a\}\}$

$\tau^i = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^s = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

$\tau^\alpha = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\}$

من مثال (3−2−2) نحصل على المجاميع المغلقة من النمط $-w$

$wc(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

المجاميع المغلقة من النمط $-iw$ هي $iwc\ (X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

الآن نوجد المجموعة المغلقة من النمط $-\alpha w$

الآن المجاميع المفتوحة من النمط $-\alpha$ التي تحتوي على $\{a\}$ هي X وان:

$wCL\ (\{a\}) = \{a\} \subseteq X$

مما تقدم $\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط $-\alpha w$

المجاميع المفتوحة من النمط $-\alpha$ التي تحتوي على $\{b\}$ هي $\{b\}$ و X و $\{b,c\}$ وان:

$wCL\ (\{b\}) = X \nsubseteq \{b\}, \{b,c\}$

لذلك فإن $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط $- \alpha w$ وبالطريقة نفسها نحصل على

$\alpha wc\ (X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

نلاحظ ان $A = \{a,b\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط $- \alpha w$، لكن A هي ليست مجموعة مغلقة من النمط $- iw$.

مبرهنة (3-2-7): اذا كانت A مجموعة مفتوحة من النمط $- i$ ومجموعة مغلقة من النمط $- iw$ في الفضاء التبولوجي فان A مجموعة مغلقة من النمط $- w$.

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن G مجموعة شبه مفتوحة بحيث ان $A \subseteq G$ سوف نثبت ان $CL\ (A) \subseteq G$. بما ان G هي مجموعة شبه مفتوحة هذا يؤدي الى ان G هي مجموعة مفتوحة من النمط $- i$. بوساطة الفرضية التي لدينا سوف نحصل على $CL(A) \subseteq G$ هذا يثبت ان A مجموعة مغلقة من النمط $- w$.■

تعريف (3-2-8): **المجموعة المغلقة من النمط** $- iiw$.

يقال لمجموعة A الجزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ) بانها مجموعة مغلقة من النمط $- iiw$ (*iiw*-closed set) اذا كان $wCL(A) \subseteq G$ عندما $A \subseteq G$ و G هي مجموعة مفتوحة من النمط $- ii$ في (X,τ). متممة المجموعة المغلقة من النمط $- iiw$. تسمى مجموعة مفتوحة من النمط $- iiw$ سوف نرمز لعائلة المجاميع المغلقة من النمط $- iiw$ في الفضاء التبولوجي بالرمز $iiwc(X,\tau)$

مثال (3-2-9): لتكن $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\}$

$c(\tau) = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{a\}\}$

$\tau^s = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{i} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

المجاميع المغلقة من النمط - w هي : $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

الآن نوحد المجاميع المغلقة من النمط $- \; iiw$.

الآن المجاميع المفتوحة من النمط $- \; ii$ التي تحتوي على $\{a\}$ هي $\{a,b\}$ وX وان

$wCL(\{a\}) = \{a\} \subseteq \{a,b\}, X$

مما تقدم $\{a\}$ مجموعة مغلقة من النمط $- \; iiw$

الآن المجاميع المفتوحة من النمط $- \; ii$ التي تحتوي على $\{b\}$ هي $\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}$ وX

$wCL(\{b\}) = X \nsubseteq \{b,c\}, \{a,b\}, \{b\}$

لذلك فإن $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة من النمط $- \; iiw$ وبالطريقة نفسها نحصل على

$iiwc(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

مبرهنة (3-2-10): كل مجموعة مغلقة من النمط $- \; iiw$. في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط $- \; \alpha w$

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي وان $A \subseteq X$ هي اية مجموعة مغلقة من النمط $- \; iiw$ و G هي مجموعة مفتوحة من النمط $- \; \alpha$ في X بحيث ان $A \subseteq G$ بما ان كل مجموعة مفتوحة من النمط $- \; \alpha$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $- \; ii$ حسب مبرهنة (2-1-24) وبما ان A مجموعة مغلقة لذلك $wCL(A) \subseteq CL(A) \subseteq G$ هذا يثبت ان A مجموعة مغلقة من النمط $- \; \alpha w$ في (X,τ).■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (3-2-11): ليكن $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\}$

$c(\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

$wCL\ (X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\} = iiwc(X,\tau)$

$\alpha wc(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

نلاحظ ان $A = \{a,b\}$ مجموعة مغلقة من النمط $\alpha w -$، لكن A ليست مجموعة مغلقة من النمط $iiw -$.

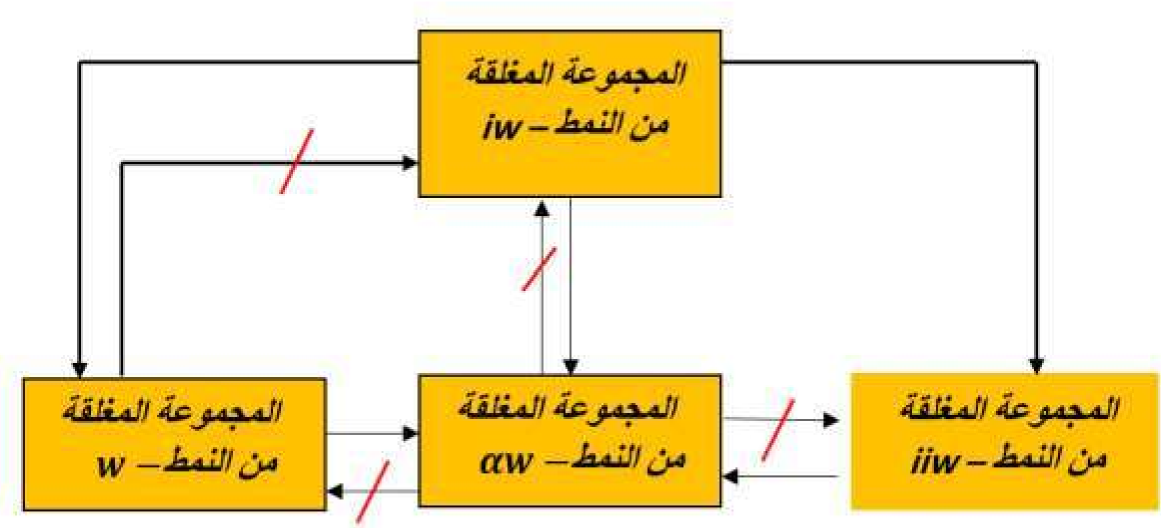
مبرهنة (3−2−12): كل مجموعة مغلقة من النمط $iw -$ في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مغلقة من النمط $iiw -$.

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي وان $A \subseteq X$ هي اية مجموعة مغلقة من النمط $iw -$ و G هي مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ في X بحيث ان $A \subseteq G$ وبما ان كل مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $i -$ حسب الملاحظة (2−1−17) وبما ان A مجموعة مغلقة لذلك $wCL(A) \subseteq CL(A) \subseteq G$ هذا يثبت ان A هي مجموعة مغلقة من النمط $iiw -$ في (X,τ).■

مبرهنة (3−2−13): ليكن $A,\ B$ مجموعتين مغلقتين من النمط $iiw -$ في الفضاء التبولوجي فان $A \cup B$ هي مجموعة مغلقة من النمط $iiw -$.

البرهان: نفرض ان (X,τ) فضاء تبولوجي وان $A,\ B$ مجموعتين مغلقتين من النمط $iiw -$ في (X,τ). نفرض ان G مجموعة مفتوحة من النمط $ii -$ في (X,τ) . بحيث ان $A \cup B \subseteq G$ فان $B \subseteq G$ و $A \subseteq G$. بما ان A,B مجموعتين مغلقتين من النمط $iiw -$ فان $wCL(A) \subseteq G, wCL(B) \subseteq G$ لذلك $wCL(A) \cup wCL(B) = wCL\ (A \cup B) \subseteq G$ هذا يثبت ان $A \cup B$ مجموعة مغلقة من النمط $iiw -$. ■

ملاحظة (3-2-14): مما تقدم نحصل على المخطط الآتي:



الفصل الرابع

بديهيات الفصل من النمط - ii

ii-Separation Axioms

لقد حاز مفهوم بديهيات الفصل عناية العديد من الباحثين ومن ضمنهم الباحث بيرفن عام 1964 قدم بديهيات الفصل T_0 T_1 ، T_2 ، T_3، T_4 بالاعتماد على المجموعة المفتوحة في التبولوجيا τ. كذلك في عام 1974 قدم ستوم [19] الفضاء المميز الهاوس دورف (Ultra Hausdorff or UT_2) . كذلك قدم صبيح عام 2012 [27] نوعاً جديداً من بديهيات الفصل بوساطة المجاميع المفتوحة من النمط-i والتي تضمنت بديهيات الفصل الآتية: فضاء- T_{0i} (i-T_0 Space) وفضاء- T_{1i} (i-T_1 Space). الغرض الرئيس من هذا الفصل هو الاستمرار في دراسة بديهيات الفصل في الفضاء التبولوجي وعملنا على تقديم نوع جديد من بديهيات الفصل على المنهج نفسه المتبع وأطلقنا عليه اسم فضاء- T_{0ii} (ii-T_0 Space) وفضاء-T_{1ii} (ii-T_1 Space) بالأعتماد على المجموعة المفتوحة من النمط-ii ودرسنا عدد من صفاتها وخصائصها موضحاً إياها بمجموعة من الأمثلة والمبرهنات. كذلك قمنا بمقارنة الفضاء- T_{0ii} مع الفضاء- T_0 والفضاء- T_{0i}، كذلك أوجدنا العلاقة بين الفضاء-T_{1ii} مع الفضاءات T_1، T_{1i}، $T_{1\alpha}$.

(4-1) بديهيات الفصل من النمط – ii (T_{0ii}, T_{1ii}) وبعض خصائصها:

في هذا البند سوف نقدم بديهيات فصل جديدة باستعمال المجاميع المفتوحة من النمط – ii وذكر عدد من خصائصها وصفاتها.

تعريف (4-1-1) : يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء- T_{0ii} إذا وفقط اذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X ، توجد مجموعة U مفتوحة من النمط -ii في X تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الأخرى. ونعطي الآن مثال توضيحي عن هذا التعريف:

مثال(2-1-4) : لتكن $X = \{a,b,c\} \ , \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

عندئذ (X,τ) فضاء -T_{0ii}، لأن $a, b \in X$ و $a \neq b$ وتوجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على a ولا تحتوي على b و $a, c \in X$ و $a \neq c$ وتوجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على a ولا تحتوي على c .

كما ان $b, c \in X$ و $b \neq c$ وتوجد مجموعة $\{a,b\}$مفتوحة من النمط -ii تحتوي على b ولا تحتوي على c .

تعريف(3-1-4) : يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء -T_{1ii} اذا وفقط اذا حقق البديهية الآتية : لكل نقطتين مختلفتين x, y تنتميان الى X ، توجد مجموعتان V, U مفتوحتان من النمط -ii في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن : $y \notin U \, , x \in U$ أو $y \in V \, , x \notin V$

ونعطي الآن مثال توضيحي عن هذا التعريف:

مثال (4-1-4) **:** لتكن $X = \{a,b\} \ , \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

فان : $\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

عندئذ (X,τ) فضاء- T_{1ii} ، لأن $a, b \in X$ و $a \neq b$ وتوجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على a ولا تحتوي على b والمجموعة $\{b\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على b ولا تحتوي على a .

ملاحظة (4-1-5) : **ليكن** (X,τ) **فضاء تبولوجي فان**:

1. كل فضاء -T_1 [32] هو فضاء -T_o
2. كل فضاء -T_n [27] هو فضاء -T_{ni} ، حيث n=0 , 1
3. كل فضاء -T_{1i} [27] هو فضاء-T_{0i}

مبرهنة (4-1-6) : كل فضاء T_0 – هو فضاء T_{0ii} –

البرهان : نفرض ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء -T_o وان x, y نقطتان مختلفتان تنتميان الى X توجد مجموعة مفتوحة U في X تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الأخرى أي أن :

$x \in U , y \notin U$

وبما ان كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النمط -ii حسب القضية (2-1-21) نستنتج ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء -T_{0ii} . ■

نتيجة (4-1-7) : كل فضاء -T_1 هو فضاء -T_{0ii}.

البرهان: مباشر من الملاحظة (4-1-5) والمبرهنة (4-1-6). ■

مبرهنة (4-1-8): كل فضاء -T_1 هو فضاء T_{1ii}.

البرهان : نفرض ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء -T_1 وأن x, y نقطتان مختلفتان تنتميان الى X توجد مجموعتان مفتوحتان V و U في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y \in V , x \notin V$ أو $y \notin U , x \in U$

وبما ان كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في النمط -ii حسب القضية (2−1−21)

نستنتج ان الفضاء التبولوجي(X, τ) هو فضاء− T_{1ii} . ■

عكس مبرهنة (4-1-8) والنتيجة (4-1-7) غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (4-1-9): لتكن $X = \{,b,c\}$, $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

عندئذ (X, τ) فضاء− T_{0ii} لأن $a,b \in X$ و $a \neq b$ وتوجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على a ولا تحتوي على b و $a, c \in X$ و $a \neq c$ وتوجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على a ولا تحتوي على c .

و $b, c \in X$ و $b \neq c$ وتوجد مجموعة $\{a,b\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على b ولا تحتوي على c.

لكن (X, τ) ليس فضاء- T_0 لأن $b, c \in X$ و $b \neq c$ ولا توجد مجموعة مفتوحة مثل G بحيث ان $c \notin G$ و $b \in G$.

عندئذ (X, τ) فضاء- T_{0ii} السبب نفسه المشروح لكن (X, τ) ليس فضاء -T_1 لأن $a, b \in X$ و $a \neq b$ وتوجد مجموعة $X \in \tau$ بحيث ان $b \in X$ و $a \in X$.

ملاحظة (4-1-10): كل فضاء− T_{1ii} هو فضاء− T_{0ii} .

وعكس هذه الملاحظة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (4-1-11): لتكن $X = \{,b\}$, $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}\}$

فإن $\tau^{ii} = \{ \emptyset, X, \{a\}\}$

لاحظ ان الفضاء (X,τ) هو فضاء -T_o ، لأن $a \neq b$ و $a, b \in X$ وتوجد مجموعة $\{a\}$مفتوحة تحتوي على a ولا تحتوي على b . وحسب المبرهنة (4-1-6) ، فان (X,τ) هو فضاء -T_{0ii} لكن (X,τ) هو ليس فضاء -T_{1ii} لأن $a, b \in X$ و $a \neq b,$ وان X هي المجموعة المفتوحة الوحيدة من النمط -ii التي تحتوي على b وتحتوي على a .

مبرهنة (4-1-12) : كل فضاء -$T_1\alpha$ هو فضاء- T_{1ii} .

البرهان: نفرض ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء -$T_1\alpha$ وان x, y نقطتين مختلفتين تنتميان الى X توجد مجموعتان مفتوحتان من النمط -α U, V في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y \notin U , x \in U$ أو $y \in V , x \notin V$

وبما ان كل مجموعة مفتوحة من النمط $\alpha -$ هي مجموعة مفتوحة من النمط -ii حسب المبرهنة (2-1-24) . نستنتج ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء- T_{1ii} .■

مبرهنة (4-1-13): كل فضاء -T_{1ii} هو فضاء- T_{Ii}.

البرهان : نفرض ان الفضاء التبولوجي (X,τ) هو فضاء -T_{1ii} وان x, y نقطتين مختلفتين تنتميان الى X توجد مجموعتان مفتوحتان من النمط -ii U, V في X بحيث ان كل مجموعة تحتوي على إحدى النقطتين لا تحتوي على الأخرى أي أن :

$y \notin U , x \in U$ أو $y \in V , x \notin V$

وبما ان كل مجموعة مفتوحة من النمط -ii هي مجموعة مفتوحة من النمط -i حسب الملاحظة (2−1−17) . نستنتج ان الفضاء التبولوجي (X, τ) هو فضاء- T_{Ii} . ■

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي :

مثال (4-1-14) : لتكن $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

فإن $\tau^i = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$\tau^{ii} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

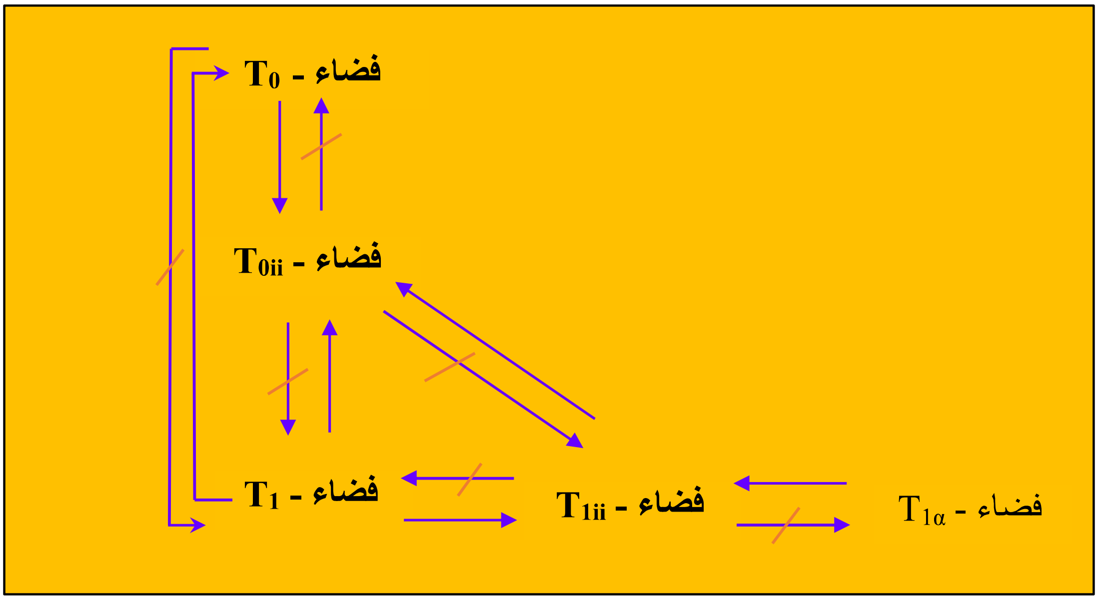
عندئذ (X, τ) فضاء- T_{Ii} لأن $a \neq b$ و $a, b \in X$ توجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -i تحتوي على a ولا تحتوي على b. $\{b\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -i تحتوي على b ولا تحتوي على a .

و $a \neq c$ و $a, c \in X$ توجد مجموعة $\{a\}$ مفتوحة من النمط -i تحتوي على a ولا تحتوي على c لذلك $\{c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -i تحتوي على c ولا تحتوي على a .

و $b, c \in X$ و $b \neq c$ وتوجد مجموعة $\{b\}$ مفتوحة من النمط -i تحتوي على b ولا تحتوي على c كذلك $\{c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -i تحتوي على c ولا تحتوي على b .

لكن (X, τ) ليس فضاء- T_{1ii} لأن $b, c \in X$ و $b \neq c$ توجد مجموعة $\{, c\}$ مفتوحة من النمط -ii تحتوي على b وتحتوي على c .

ملاحظة(4-1-15) : مما تقدم نحصل على المخطط الآتي :



مبرهنة(4-1-16) : اذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكل تبولوجي من النمط -ii وكان (X,τ) فضاء $-T_{0ii}$ ، فإن (Y,δ) فضاء $-T_{0ii}$.

البرهان : ليكن $m, n \in Y$ بحيث أن $m \neq n$ بما ان f شاملة ، توجد نقطتان $x, y \in X$ حيث ان $m=f(x)$ و $n=f(y)$. بما ان f متباينة وان $m \neq n$ فإن $x \neq y$ بما ان (X,τ) فضاء-T_{0ii}، توجد مجموعة U مفتوحة من النمط -ii تحتوي على إحدى النقطتين ولا تحتوي على الأخرى.

لتكن $x \in U$ و $y \notin U$ ، الآن تأمل $f(U)$ نلاحظ :

1. $f(U)$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii ، لأن U مجموعة مفتوحة من النمط -ii و f تطبيق مفتوح من النمط -ii .
2. $m \in f(U)$ لأن $x \in U$ و $n \notin f(U)$ لأن $y \notin U$

اذن (Y,δ) فضاء- T_{0ii} . ■

نتيجة(4-1-17) : اذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ تشاكل تبولوجي من النمط -ii وكان (X,τ) فضاء− T_{1ii} ، فإن (Y,δ) فضاء− T_{1ii} .

البرهان: ليكن $m, n \in Y$ بحيث ان $m \neq n$. بما ان f شاملة، توجد نقطتان $x, y \in X$ حيث ان $m=f(x)$ و $n=f(y)$. بما ان f متباينة وإن $m \neq n$ فإن $x \neq y$. بما ان (X,τ) فضاء− T_{1ii} توجد مجموعتان U,V مفتوحتان من النمط -ii بحيث ان

$y \notin U , x \in U$ أو $y \in V , x \notin V$

الآن تأمل $f(U)$ و $f(V)$ نلاحظ :

1. $F(U)$ و $f(V)$ مجموعتان مفتوحتان من النمط -ii ، لأن U,V مجموعتان مفتوحتان من النمط -ii و f تطبيق مفتوح من النمط -ii .
2. لأن $m \in f(U)$ لأن $x \in U$ و $n \notin f(U)$ لأن $y \notin U$
3. $n \in f(V)$ لأن $y \in V$ و $m \notin f(V)$ لأن $x \notin V$

اذن (Y,δ) فضاء− T_{1ii} . ■

مبرهنـــــــــــة (4-1-18): يكـــون الفضـــاء (X,τ^{ii}) فضـــاء- T_{0ii} اذا وفقـــط إذ كـــان $CL_{ii}(\{x\}) \neq CL_{ii}(\{y\})$ لكل نقطتين مختلفتين x و y في X.

البرهان : نفرض أن $x \neq y$ و $CL_{ii}(\{x\}) \neq CL_{ii}(\{y\})$ لكل نقطتين $x, y \in X$ سوف نثبت ان (X,τ^{ii}) هو فضاء- T_{0ii} . بما ان المجموعتين $CL_{ii}(\{x\})$ و $CL_{ii}(\{y\})$ مختلفتين، توجد نقطة $z \in X$ تنتمي الى إحدى المجموعتين ولا تنتمي الى الأخرى. لتكن $z \in CL_{ii}(\{x\})$

و $CL_{ii}(\{y\}) \not\ni z$ ، والآن $x \notin CL_{ii}(\{y\})$ ، لأنه اذا كانت $x \in CL_{ii}(\{y\})$ فإن $CL_{ii}(\{x\}) \subseteq CL_{ii}(CL_{ii}(\{y\})) = CL_{ii}(\{y\})$ وعليه فإن $z \in CL_{ii}(\{x\}) \subseteq CL_{ii}(\{y\})$ وهذا تناقض. فأن $x \in X \setminus CL_{ii}(\{y\})$ ، أي أن $X \setminus CL_{ii}(\{y\})$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii تحتوي على x ولا تحتوي على y مما تقدم (X, τ^{ii}) فضاء- T_{0ii} .

العكس: نفرض ان (X, τ^{ii}) هو فضاء− T_{0ii} ، وان $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ بما ان (X, τ^{i}) فضاء- T_{0ii} ، وتوجد مجموعة U مفتوحة من النمط- ii تحتوي على إحداهما ولا تحتوي على الأخرى. لتكن عندئذ $x \in U$ و $y \notin U$ ، $X \setminus U$ مجموعة مغلقة من النمط -ii تحتوي على y ولا تحتوي على x .

والآن من تعريف $CL_{ii}(\{y\})$ التي هي تقاطع كل المجاميع المغلقة من النمط -ii التي تحتوي على المجموعة $\{y\}$ ، فإن $y \in CL_{ii}(\{y\})$ ولكن $x \notin CL_{ii}(\{y\})$ لأن $x \notin X \setminus U$. فإن $CL_{ii}(\{x\}) \neq CL_{ii}(\{y\})$. ■

مبرهنة (4-1-19) : يكون الفضاء (X, τ^{ii}) فضاء- T_{1ii} اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة أحادية فيه هي مجموعة مغلقة من النمط -ii .

البرهان: نفرض ان (X, τ^{ii}) فضاء- T_{1ii} وان $z \in X$. سوف نثبت ان $\{z\}$ مجموعة مغلقة من النمط -ii . أي أن $X \setminus \{z\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii . لتكن $x \in X \setminus \{z\}$ عندئذ $x \neq z$ بما ان (X, τ^{ii}) فضاء- T_{1ii}، توجد مجموعة U_x مفتوحة من النمط -ii تحتوي على x ولا تحتوي على z . أي أن $x \in U_x$ و $z \notin U_x$ فأن $x \in U_x \subseteq X \setminus \{z\}$ ، أي أن

$X\backslash\{z\}=\cup\ (U_X: x\in X\ \backslash\{z\})$ وبذلك تكون $X\backslash\{z\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii لأنها اتحاد مجموعات مفتوحة من النمط -ii في (X,τ^{ii}) . اذن $\{z\}$ مجموعة مغلقة من النمط -ii .

العكس : نفرض ان $\{z\}$ مجموعة مغلقة من النمط -ii لكل $z\in X$ نفرض ان $x,y\in X$ حيث $x\neq y$.

والآن $x\neq y$ يؤدي الى $x\in X\backslash\{y\}$ ، عندئذ تكون $X\backslash\{y\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii تحتوي على x ولا تحتوي على y ، لأن $\{y\}$ مجموعة مغلقة من النمط -ii . كما ان $X\backslash\{x\}$ مجموعة مفتوحة من النمط -ii تحتوي على y ولا تحتوي على x ، لأن $\{x\}$ مجموعة مغلقة من النمط -ii . اذن (X,τ^{ii}) فضاء- T_{1ii} . ■

الفصل الخامس

المجاميع المفتوحة من النمط -ii في الفضاء التبولوجي الثنائي

ii – open sets in Bi topological Space

إن دراسة الفضاءات التبولوجية الثنائية بدأها كيلي . يسمى الثلاثي $(X,\ \tau_1,\ \tau_2)$ حيث X مجموعة غير خالية وإن $\tau_1,\ \tau_2$ هي تبولوجيا على X فضاءً تبولوجياً ثنائياً. وفيما بعد عمل عدد من الباحثين على تعميم المفاهيم التبولوجية المختلفة على الفضاءات التبولوجيا الثنائية. إن مفهوم المجاميع المفتوحة والمجاميع المفتوحة من النمط$-\alpha$ وسعت وسميت - $(i,\ j)$open ،$(i,\ j)\alpha$-open في [11]، [12] على التوالي حيث أن $(i,\ j)$ تشير إلى الزوج التبولوجي $(\tau_i\ ,\tau_j)$ وإن $i\ , j = 1, 2$ ، حيث $i \neq j$.

ففي عام 2012 قام عامر وصبيح [26] بدراسة صفات وخصائص المجاميع المفتوحة من النمط$-i$ في الفضاءات التبولوجية الثنائية لذلك فإن الغرض الاساس من هذا الفصل هو دراسة خصائص المجاميع المفتوحة من النمط -ii السابقة المقدمة في البند الاول من الفصل الثاني في الفضاء التبولوجي الثنائي $(X,\ \tau_1,\ \tau_2)$ وعلاقتها مع المجاميع المفتوحة الاخرى المعروفة في هذا الفصل مثل المجاميع المفتوحة $\tau_1\ \ \tau_2 -$ $(\tau_1\ \ \tau_2 - open\ set)$ والمجاميع المفتوحة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - i -$ $(\tau_1\ \ \tau_2 - i - open\ set)$ [26]، والمجاميع لمفتوحة من النمط$-\alpha$ $\tau_1\ \tau_2\ -$ $(\tau_1\ \tau_2 - \ \alpha - open\ set\ )$ [24] معززاً ذلك بالأمثلة والمبرهنات.

(1-5) تعاريف وأمثلة وعدد من المبرهنات:

سوف نقدم تعريف المجموعة المفتوحة من النمط $ii -$ والمبرهنات المتعلقة بها والعلاقة بينها وبين عدد من انواع المجاميع المفتوحة الأخرى في الفضاء التبولوجي الثنائي.

تعريف (5-1-1): تسمى المجموعة الجزئية A في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1\ \tau_2 - ii -$ $(\tau_1\ \tau_2 - ii - open\ sets)$. اذا وجدت مجموعة مفتوحة $G \in \tau_1$ $G \neq \emptyset, X$ بحيث ان $A \subseteq \tau_2 - CL\ (A \cap G)$ و $int\ (A) = G$. ونقدم مثال كتوضيح لهذا التعريف:

مثال (5-1-2): لتكن $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ $X = \{a, b, c\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$

فان $C(\tau_2) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$

1. $A = \{a\}$ $G = \{a\}$

$\{a\} \subseteq \tau_2 - CL\ (\{a\} \cap \{a\}) \subseteq \tau_2 - CL\ \{a\} \subseteq \{a, b\}$ $Int\ \{a\} = \{a\}$

2. $A = \{b\}$ $G = \{b\}$

$\{b\} \subseteq \tau_2 - CL\ (\{b\} \cap \{b\}) \subseteq \tau_2 - CL\ \{b\} \subseteq \{b\}$ $Int\ \{b\} = \{b\}$

3. $A = \{a,b\}$ $G = \{a,b\}$

$\{a,b\} \subseteq \tau_2 - CL(\{a, b\} \cap \{a, b\}) \subseteq \tau_2 - CL\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ $Int\{a,b\}=\{a,b\}$

1. $A = \{a,c\}$ $G = \{a\}$

$\{a,c\} \subseteq \tau_2 - CL(\{a, c\} \cap \{a\}) \subseteq \tau_2 - CL\{a\} \nsubseteq \{a, b\}$ $Int\ \{a,c\}=\{a\}$

2. $A = \{b,c\}$ $G = \{b\}$

$\{b, c\} \subseteq \tau_2 - CL(\{b, c\} \cap \{b\}) \subseteq \tau_2 - CL\{b\} \nsubseteq \{b\}$ $Int\{b,c\}=\{b\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $\tau_1\ \tau_2 - ii -$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

$\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ لا تمثل مجاميع مفتوحة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - ii -$ لانها لا تحقق الشروط.

نلاحظ في هذا المثال ان كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي هي ليست مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - ii -$ لذلك سوف نحاول ان نصوغ تعريف جديد وذلك بإضافة شروط عدة إلى التعريف (5-1-1) وبهذا نستطيع ان نحقق ان كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي هو مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1\ \tau_2 - ii -$ وكما يأتي:

تعريف (5-1-3): تسمى المجموعة الجزئية A في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - ii -$ $(\tau_1\ \ \tau_2 - ii - open\ stes)$ اذا وجدت مجموعة مفتوحة $u, v \neq \emptyset, X$ و $u, v\ \in\ \tau_1\ \cup\ \tau_2$ إذ إن:

1. $A = Int^1(u) \qquad OR \qquad A = Int^2(v)$
2. $A \subseteq CL^1(A \cap u) \qquad OR \qquad A \subseteq CL^2(A \cap v)$

متممة المجموعة المفتوحة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - ii -$ تسمى مجموعة مغلقة من النمط $\tau_1\ \ \tau_2 - ii -$ ونقدم المثال الآتي:

مثال (5-1-4): لتكن $\tau_{1,} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ $\qquad X = \{a, b, c\},$

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}$

$\tau_1 \cup \ \ \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$

$C\ (\tau_1) = \{\ \emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$

$C(\tau_2) = \{\ \emptyset, X, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$

1. $A = \{a\} \qquad u = \{a\} \qquad v = \{a,b\}$

$\{a\} = Int^1\{a\} = \{a\}$ $\{a\} \subseteq CL^1 (\{a\} \cap \{a\}) = \{a,c\}$

2. $A = \{b\}$ $u = \{b\}$ $v = \{a,b\}$

$\{b\} = Int^1\{b\} = \{b\}$ $\{b\} \subseteq CL^1 (\{b\} \cap \{b\}) = \{b,c\}$

3. $A = \{c\}$ $u = \{c\}$ $v = \{a,c\}$

$\{c\} = Int^1\{c\} = \emptyset$ $\{c\} = Int^2\{c\} = \{c\}$

$\{c\} \subseteq CL^1 (\{c\} \cap \{c\}) = \{c\}$

4. $A = \{a,b\}$ $u = \{a,b\}$ $v = \{b\}$

$\{a,b\} = Int^1\{a,b\} = \{a,b\}$ $\{a,b\} \subseteq CL^1 (\{a,b\} \cap \{a,b\}) = X$

5. $A = \{a,c\}$ $u = \{a,c\}$ $v = \{c\}$

$\{a,c\} = Int^1\{a,c\} \neq \{a\}$ $\{a,c\} = Int^2\{a,c\} = \{a,c\}$

$\{a,c\} \subseteq CL^1 (\{a,c\} \cap \{a,c\}) = \{a,c\}$

6. $A = \{b,c\}$ $u = \{c\}$ $v = \{b\}$

$\{b,c\} = Int^1\{b,c\} \neq \{b\}$ $\{b,c\} \subseteq CL^1 (\{b,c\} \cap \{b\}) = \{b,c\}$

$\{b,c\} = Int^2\{b,c\} \neq \{c\}$

$\tau_{1,} \tau_2 - ii - open\ stes\ are: \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

نلاحظ في هذا المثال ان كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي هو مجموعة من النمط $\tau_{1,} \tau_2 - ii -$ حسب التعريف (5-1-3).

مثال (5-1-5): لتكن $X = \{a,b,c,d\}$

$\tau_1 = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b,c,d\},$ $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c,d\}\}$

$C(\tau_1) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a\}\}$

$C(\tau_2) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,d\}\}$

حسب التعريف (5-1-3) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط $\tau_1\ \tau_2 - ii -$ هي:

.$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c,d\}\}$

تعريف (5-1-6): لتكن A أية مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) يُعرف:

1. إنغلاق المجموعة A من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي يرمز له بالرمز $\tau_1\ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ بأنه تقاطع كل المجاميع المغلقة من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي التي تحوي A .
2. داخل المجموعة A من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي والذي يرمز له بالرمز $\tau_1\ \tau_2 - Int_{ii}(A)$ بأنه اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي المحتوى في A.

(5-2) عدد من خصائص المجموعة المفتوحة من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي

مبرهنة (5-2-1) : لأي فضاء تبولوجي ثنائي (X, τ_1, τ_2) ولأية مجموعة جزئية A:

1. $\tau_1\ \tau_2 - Int_{ii}(A)$ هو مجموعة مفتوحة من النمط-ii $\tau_1\ \tau_2 -$
2. $\tau_1\ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ هو مجموعة مغلقة من النمط-ii $\tau_1\ \tau_2 -$

3. إذا كانــــت A هـــي مجموعـــة مغلقـــة مـــن الـــنمط $ii-$ $\tau_1\ \ \tau_2-$ فـــإن

$\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)=A$

4. إذا كانــــت A هـــي مجموعـــة مفتوحـــة مـــن الـــنمط $ii-$ $\tau_1\ \ \tau_2-$ فـــإن

$\tau_1\ \ \tau_2-int_{ii}(A)=A$

5. إذا كانت $A\subset B$ فإن $\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(B)\ \subset\ \tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$

6. $X-\ \tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)=\ \tau_1\ \ \tau_2-Int_{ii}(X-A)$

7. $X-\ \tau_1\ \ \tau_2-Int_{ii}(A)=\ \tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(X-A)$

8. $\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$ $x\in$ إذا وفقط إذا لكل مجموعة مفتوحة G من النمط $ii-$ تحوي x ، $A\cap G\ \neq\ \emptyset$.

البرهان: 1, 2, 3, 4 واضح من التعريف (3-1-5)

5. لتكن $A\subset B$ بما أن $\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{i}(A)$ هي أصغر مجموعة مغلقة من الـــــــنمط- ii تحـــــوي A فـــــإن $A\ \subset\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$ كـــــــذلك فــــــــــــــــإن $B\ \subset\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(B)$ نســــــــــــــــتنتج أن $\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(B)\subset\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$.

6. لتكن $X-\ \tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$ $x\in$ إذا وفقط إذا $\tau_1\ \ \tau_2-Cl_{ii}(A)$ $x\notin$ فلكل $G\ \in\ \tau_1\tau_2-iio\ (X)$ وتحوي النقطة x فإن $A\cap G\ \neq\ \emptyset$ إذا وفقط إذا $x\in$ $G\ \subset X-A$ إذا وفقط إذا $x\ \in\tau_1\ \ \tau_2-Int_{ii}(X-A)$.

7. بطريقة مشابهة لبرهان 6

8. نفرض أن $x \in \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ سوف نبرهن $A \cap G \neq \emptyset$ لكل مجموعة مفتوحة G من النمط-ii تحوي x ، نفرض أنه يوجد مجموعة مفتوحة G من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ تحوي x بحيث أن $A \cap G = \emptyset$ ، إذن $A \subseteq G^c$ وإن G^c هي مجموعة مغلقة من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ لذلك فإن $\tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A) \subseteq \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(G^c)$ بما أن $x \in \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ هذا يؤدي إلى أن $x \in \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(G^c)$ وبما أن G^c هي مجموعة مغلقة من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ وحسب المبرهنة (5-2-1) (3) $x \in G^c$ أي أن $x \notin G$ وهذا تناقض. إذن $A \cap G \neq \emptyset$ لكل مجموعة مفتوحة G من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ تحوي x .

العكس: نفرض أن $A \cap G \neq \emptyset$ لكل مجموعة مفتوحة G من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ تحوي x ، سوف نبرهن أن $x \in \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ ، نفرض أن $x \notin \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$ حسب التعريف (5-1-6) يوجد مجموعة مغلقة F من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$ تحوي A بحيث $x \notin F$ لذلك فإن $x \in F^c$ وإن F^c هي مجموعة مفتوحة من النمط-ii-$\tau_1 \ \tau_2$. لذلك فإن $A \cap F^c = \emptyset$ وهذا تناقض للفرض لذلك $x \in \tau_1 \ \tau_2 - Cl_{ii}(A)$. ■

مبرهنة (5-2-2): كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X, τ_1, τ_2) هي مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1 \ \tau_2 - ii -$.

البرهان: لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) :

اولا: اذا كان $G \in \tau_1$ سوف نثبت ان G مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1 \ \tau_2 - ii -$.

ضع $u = G$ نحصل على

1. $G \subseteq CL^1(G \cap G) \subseteq CL^1(G)$
2. $G = Int^1(G)$ $\quad G \in \tau_1$ لأن

ثانياً: اما اذا كانت $G \in \tau_2$، نضع v=G عندئذٍ

1. $G \subseteq CL^2(G \cap G) \subseteq CL^2(G)$
2. $G = Int^2(G)$ $\quad G \in \tau_2$ لأن

حسب تعريف (5-1-3) نستنتج ان في كلا الحالتين تكون G مجموعة مفتوحة من النمط $- ii - \tau_{1,} \tau_2$.

ملاحظة (5-2-3): من تعريف (5-1-3) نستنتج بأن كل مجموعة مفتوحة من النمط$-ii-\tau_{1,} \tau_2$ في الفضاء التبولوجي الثنائي هي مجموعة مفتوحة من النمط$-i-\tau_{1,} \tau_2$.

عكس الملاحظة (5-2-3) غير صحيح بشكل عام كما في المثال الأتي:

مثال (5-2-4): ليكن $X = \{a, b, c\}, \ \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

$C(\tau_1) = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$

$C(\tau_2) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $- i - \tau_1 \ \tau_2$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $- ii - \tau_2 \ \ \tau_1$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}$

نلاحظ ان $\{a,c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $- i - \tau_2 \ \ \tau_1$ لكن $\{a,c\}$ ليست مجموعة مفتوحة من النمط $- ii - \tau_2 \ \ \tau_1$.

ملاحظة (5-2-5) : نلاحظ كل مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha - \tau_2 \ \ \tau_1$ في الفضاء التبولوجي الثنائي ليس من الضروري أن يؤدي إلى مجموعة مفتوحة من النمط $- ii - \tau_2 \ \ \tau_1$. على عكس ما توصلنا إليه في الفصل الثاني (البند الأول) حسب المبرهنة (2-1-24) التي تنص على أن (كل مجموعة مفتوحة من النمط-α في الفضاء التبولوجي هي مجموعة مفتوحة من النمط-ii). كذلك نلاحظ أن كل مجموعة مفتوحة من النمط $- ii - \tau_2 \ \ \tau_1$ في الفضاء التبولوجي الثنائي ليس من الضروري أن يؤدي إلى مجموعة مفتوحة من النمط $- \alpha - \tau_2 \ \ \tau_1$ كما في الأمثلة الأتية:

مثال (5-2-6) : لتكن $X = \{a,b,c,d\}$

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c,d\}, \ \ \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c,d\}\}$

$C(\tau_1) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a\}\}$

$C(\tau_2) = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,d\}\}$

حسب التعريف (5-1-3) نحصل على المجاميع المفتوحة من النمط $- ii - \tau_2 \ \ \tau_1$ هي:

.$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c,d\}\}$

حسب تعريف المجموعة المفتوحة من النمط$-\alpha$ $\tau_1 \ \ \tau_2 - \alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي

حصلنا على المجاميع: $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c, d\}\}$.

نلاحظ أن {c} هي مجموعة مفتوحة من النمط $\tau_1 \ \ \tau_2 - ii -$ ، لكن ليست مجموعة مفتوحة

من النمط$-$ $\tau_1 \ \ \tau_2 - \alpha$.

مثال (7-2-5): ليكن $X = \{a, b, c\}, \ \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

$C\ (\tau_1) = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$

$C\ (\tau_2) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$

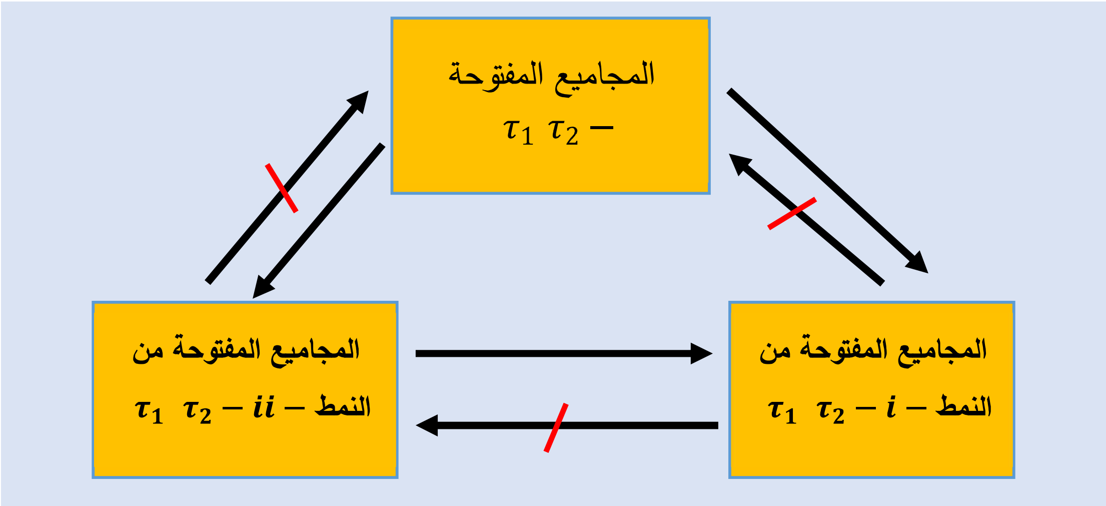
المجاميع المفتوحة من النمط $- \ \tau_1 \ \ \tau_2 - \alpha$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $- \ \tau_1 \ \ \tau_2 - ii$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}$

نلاحظ ان $\{a, c\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $- \ \tau_1 \ \ \tau_2 - \alpha$ لكن $\{a, c\}$ ليست

مجموعة مفتوحة من النمط $- \ \tau_1 \ \ \tau_2 - ii$.

ملاحظة (5-2-8): مما تقدم نحصل على المخطط الاتي:



(5-3) الاستمرارية للتطبيقات من النمط- ii في الفضاءات التبولوجية الثنائية.

في هذا البند سندرس نوعاً جديداً من التطبيقات المستمرة أسميناها التطبيق المستمر من النمط-ii في الفضاءات التبولوجية الثنائية. كذلك أوضحنا العلاقة بين التطبيق المستمر من النمط-ii في الفضاء التبولوجي الثنائي مع التطبيق المستمر والتطبيق المستمر من النمط-i والتطبيق المستمر من النمط $-\ \alpha$ على التوالي موضحاً ذلك بالأمثلة والمبرهنات.

ملاحظة: في هذا البند $(X,\tau_1\,,\tau_2)$ و(Y,δ_1,δ_2) تمثل دائماً فضاءات تبولوجية.

تعريف (5−3−1): يقال للتطبيق $f\colon (X,\tau_1\,,\tau_2)\ \to (Y,\delta_1,\delta_2)$ أنه تطبيق مستمر من النمط-ii إذا وفقط إذا كانت $f^{-1}\,(G)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط-ii $\tau_1\ \ \tau_2-$ في $(X,\tau_1\,,\tau_2)$ لكل مجموعة مفتوحة $\delta_1\ \ \delta_2\ -G$ في (Y,δ_1,δ_2) .

مبرهنة (5−3−2) : ليكن $f\colon (X,\tau_1\,,\tau_2)\ \to (Y,\delta_1,\delta_2)$ تطبيقاً عندئذٍ :

1. إذا كان f مستمراً فإن f مستمراً من النمط-ii.

2. إذا كان f مستمراً من النمط- ii فإن f مستمراً من النمط-i.

البرهان (**1**): ليكن $f: (X,\tau_1 ,\tau_2) \to (Y,\delta_1,\delta_2)$ تطبيقاً مستمراً عندئذ $f^{-1}(G)$ هي مجموعة مفتوحة $\tau_1 \ \tau_2 -$ في X لأي مجموعة مفتوحة $G- \delta_2 \ \delta_1$ في Y، وحسب المبرهنة $(5-2-2)$ نحصل على $f^{-1}(G)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط- ii $- \tau_2 \ \tau_1$ في X وحسب التعريف $(5-3-1)$ نحصل على أن f مستمراً من النمط-ii في الفضاء التبولوجي (X,τ_1 ,τ_2) .

(**2**): أسلوب البرهان (1) نفسه؛ لأن كل مجموعة مفتوحة من النمط- ii $- \tau_2 \ \tau_1$ هي مجموعة مفتوحة من النمط- i $- \tau_2 \ \tau_1$ حسب الملاحظة $(5-2-3)$. إذن كل تطبيق مستمر من النمط-ii هو تطبيق مستمر من النمط- i في الفضاء التبولوجي الثنائي.

عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام كما في المثال الآتي:

مثال (**5-3-3**): ليكن $X = \{a,b,c\}$

$\tau_1 = \{\emptyset, X,\{a\}\}, \qquad \delta_1 = \{\emptyset, Y,\{a\},\{a,c\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, X,\{a\},\{a,b\}\} \qquad \delta_2 = \{\emptyset, Y,\{a,c\}\}$

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X,\{a\},\{a,b\}\}$

$C(\tau_1) = \{\emptyset, X,\{b,c\}\}$

$C(\tau_2) = \{\emptyset, X,\{b,c\},\{c\}\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $-i-$ $\tau_1 \;\; \tau_2$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}$

المجاميع المفتوحة من النمط $-ii-$ $\tau_1 \;\; \tau_2$ هي $\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}$

نلاحظ أن التطبيق المحايد $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \delta_1, \delta_2)$ هو تطبيق مستمر من النمط– *i* في الفضاء التبولوجي الثنائي حسب التعريف (1–3–13) ولكن f ليس تطبيق مستمر من النمط–*ii* حسب التعريف (1–3–5) لأن المجموعة $\{a,c\}$ هي مجموعة مفتوحة – $\delta_1 \;\; \delta_2$ في (Y, δ_1, δ_2) لكن $f^{-1}(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ليس مجموعة مفتوحة من النمط– ii – $\tau_1 \;\; \tau_2$ في (X, τ_1, τ_2) . إذن f ليس تطبيق متسمر من النمط–*ii* في الفضاء التبولوجي الثنائي.

الاستنتاجات والأعمال المستقبلية

الاستنتاجات والأعمال المستقبلية

الاستنتاجات:

1- وجود ارتباط وثيق بين المجاميع المفتوحة والمجاميع المفتوحة من النمط- α والمجاميع المفتوحة من النمط- i والمجاميع المفتوحة من النمط- ii

المجاميع المفتوحة $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط-α** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط- *ii*** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط-*i***

المجاميع المفتوحة $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط-α** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط- *ii*** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **المجاميع المفتوحة من النمط-*Int***

وبالطريقة نفسها يمكن إيجاد علاقة مع مجاميع أخرى.

2- إنتقال هذا الارتباط إلى التشاكلات التبولوجية الخاصة بهذه الأصناف من المجاميع المفتوحة .

التشاكل $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط-α** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط- *ii*** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط-*i***

التشاكل $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط-α** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط- *ii*** $\overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **التشاكل من النمط-*Int***

3- من بديهيات الفصل بالنسبة للمجاميع المفتوحة من النمط- ii حصلنا على العلاقة الأتية:

$$T_0 \overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} T_{0ii} \overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} T_{0i}$$

$$T_1 \overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} T_{1ii} \overset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} T_{1i}$$

4- من الاستنتاجات المهمة هو ظهور هذه المجموعة المعرفة من قِبلنا التي تكافئ المجموعة المفتوحة من النمط $\alpha-$ توصلنا إلى أن (X, τ^{ii}) يمثل أيضاً فضاءاً تبولوجيا ولكنها مختلفة تماماً عن المجموعة المفتوحة من النمط -α.

الأعمال المستقبلية:

1- في الفضاءات التبولوجية الثنائية (X, τ_1, τ_2) بالإمكان إيجاد علاقة بين المجموعة المفتوحة من النمط $-\ \alpha-\ \tau_1\ \tau_2$ والمجموعة المفتوحة من النمط $-\ ii -\ \tau_1\ \tau_2$ بحسب شروط معينة وهي إما $\tau_1 \subseteq \tau_2$ أو $\tau_2 \subseteq \tau_1$ وإما تكون τ_1, τ_2 على شكل مجاميع مغلقة ومفتوحة في آن وأحد.

2- على غرار ما قام به عمر يوسف خطاب [31] في رسالته بتعريف المجموعة المفتوحة من النمط-$i\alpha$ يمكن تعريف نوع جديد من المجاميع نسميه المجموعة المفتوحة من النمط $-ii\alpha$ والذي ينص: يقال للمجموعة A في الفضاء التبولوجي (X, τ) أنها مجموعة مفتوحة من النمط $-ii\alpha$ إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النمط $-\ \alpha$ $(G \neq \emptyset, X)$ بحيث ان $A \subseteq CL(A \cap G)$ و $Int(A) = G$ ودراسة خصائصها ومميزاتها وعلاقتها مع المجاميع المفتوحة الأخرى.

3- نستطيع وبالأسلوب نفسه أن نوجد علاقة بين المجاميع المفتوحة من النمط-ii والمجاميع المفتوحة من النمط-$i\alpha$.

4- وبالأسلوب نفسه يمكن دراسة نوع جديد من المجاميع المفتوحة نسميه المجموعة المفتوحة من النمط-iib .

5- الاستمرار بدراسة بديهيات الفصل الآتية: T_{2ii} , T_{3ii} , T_{4ii}

6- يمكن تعريف نوع جديد من المجاميع نسميها المجاميع المفتوحة من النمط-ii المعممة، ودراسة صفاتها وخواصها.

References

[1] A.A. El-Atik, "*A Study of Some Types of Mappings on Topological Spaces*", *M. sci.thesis, Tanta univ.* Egypt, (1997).

[2] A.S. Mashhour, Hasanein.I. A and EIDeeb. S. N, "α-Continuous and α- Open Mappings", *Acta. Mathematica, Hungarica*, Vol. 41, No.3, (1983), pp.213-218.

[3] E. Ekici and M. caldas, "Slightly-Continnous Functions", *Bol. Soc. Para Mat*., Vol.22, No.2, (2004), pp.63-74.

[4] I.L. Reilly and Vamanmurthy M.K., "On $\alpha -$ Continuous in Topological Spaces", *Acta Math. Hungar*, Vol.45, No.1-2, (1985), pp. 27-32.

[5] J. Dontchev and H.Maki, "On θ- Generalized Closed Sets", *International. Math.* Sci, Vol.22, No.2, (1999), pp.239-249.

[6] J.Cao, M. Ganster, I Reilly and M. Steiner, "$\delta -$ clousre, $\theta -$ clousre , and Generalizes Closed Sets", *Applied General Topology*, Vol.6, No.1, (2005), pp.79-86.

[7] J.P. Lee, "On Semi-Homeomorphism", *International Journal Math and Math Sci*. Vol.13, No.1, (1990), pp. 129-134.

[8] K. Al-zoubi, "On Generalized W-Closed Sets", *international Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*,Vol.13,No. 5, (2005), pp. 2011-2021.

[9] L. Vinayagamoothi and N. Nagaveni, "On Generalized α b-continuous Maps, on Generalized α b-open Maps and on Generalized α b-closed Maps", *International Journal of Math. Analysis*, Vol.6, No.13, (2012),pp. 619-631

[10] M. Caldas, S. Jafari and M.M. kovar, "**Some Properties of θ-Open Sets**", *Divulgaciones Matematicas,* Vol.12, (2004), pp. 161-196.

[11] M. Caldas, “A Note on Some Applications of α- Open Sets”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 2, No.1,(2003), pp.125-130.

[12] M. Lellis Thiragar and B. MeeraDevi, “Bitopological B-Open Sets”, *International Journal of Algorithms*, *computing and Mathematices*, vol.3, No. 3, (2010).

[13] M.R. Parimala, R. Udhayakumar, R. Jeevitha and V. Biju, “On αw-Closed Set in Topological Spaces", *International Journal of pure and Applied Mathematics,* Vol.115, No. 5, (2017), pp.1049-1056.

[14] N. Levine, “Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces”, *The American Mathematical Monthly*, Vol.70, No.1, (1963), PP.36-41.

[15] N.N. Biswas," **On Some Mappings in Topological Spaces**", *Bull Calcutta Math., Soc.* Vol. 61,(1969), pp.127-135.

[16] O. Njástad, “On Some Classes of Nearly Open Sets”, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.15, No.3, (1965), pp. 961 - 970.

[17] P. Sundaram and M.S. John, “On W-Closed Sets in Topology”, *Acts Ciencica Indian Mathematics*, Vol.26, No.4, (2000), pp.389 - 392.

[18] R. Devi and k Balachandran, “Some Generalizations of α − Homeomorphism of Topological Space” , *Indian Journal pure appl. Math,* Vol.32, No.4, April (2001) .

[19] R. Staum, “The Algebra of Bounded Continuous Functions into a nonachimedean Field”, *pacific Journal Math.*, Vol.50, No.3, (1974), pp.169-185.

[20] R.M. Latifa, “**Topological Properties of Delta-Open Sets**”, *king fahd university of petrolenm and Minerals, Technical Report Series*, TR (409), (2009).

[21] S. Bose and D. Sinha, "**Almost Open, Almost Closed, M-Continues And Almost Compact Mappings In Bitopological Spaces**". *Bull Calcutta Math., Soc.* Vol. 73 ,(1981), pp.345-354.

[22] S.F. Tadoros, "**On α − Homeomorphism of Topological Space**", *Ain shama Sci.* Bull. Vol.28, A. (1990), pp. 81-98.

[23] S.N. Maheshwayi and R. Preasad, "On S. Normal Spaces", *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie* (N.S), Vol.22, No.70, (1978), pp.27-29.

[24] S.N. Maheshwayi and R. preasad, "Semi Open Sets and Semi Continuous Functions in Bitopological Spaces". *Math, Notae*, Vol. 26, No.78,(1977), pp. 29-39.

[25] S.P. Arya and T.M. Nour, "On Separation Axioms for Bitopological Spaces", *Indian Journal pure Appl, Math*., Vol.19, No.1, Jan (1988), pp.42-50.

[26] S.W. Askandar and A.A.Mohammed, "i- Open Sets in Bitoplogical Spaces", *Al- Rafidan Journal of Computer Sciences and Mathematics*, Vol.12, No.1, (2018), pp. 13-23.

[27] S.W. Askandar, "On i – Separation Axioms", *International Journal of Scientific and Engineering Research*, Vol.7, (2016), pp.367-373.

[28] T. Fukutake, "Semi Open Sets on Bitopological Spaces", *Bull. Fukuoka uni. Education,* Vol.38, No.3, (1989), pp.1-7.

[29] T.Noiri, "On α − Continuous Functions", C*asopis pro pestovani Mathematical*, Vol.109, No.2, (1984), pp.118-126.

[30] صبيح، وديع اسكندر، " *صفة الموسعة وغير الموسعة تبولوجياً للمجاميع شبه المفتوحة، المفتوحة من النوع-α، والمفتوحة من النوع -i مع التطبيق* "، رسالة ماجستير ، جامعة الموصل، العراق, 2012.

[31] عمر، يوسف خطاب، " *في المجاميع المفتوحة من النوع-$i\alpha$ في الفضاءات التبولوجية وتطبيقاتها* "، رسالة ماجستير ، جامعة الموصل، العراق, 2012.

[32] وليم، بيرفن، " **أساسيات التبولولجيا العامة** "، ترجمة: د. عطا الله ثامر العاني، جامعة الموصل، 1985.

Abstract

Generalizing the concept of open set in topological space leads to the emergence of new concepts that improve general topology concepts in all its aspects. In the beginning of the sixties of the last century (Levine) gave the concept of the semi-open set to open ways for researchers to improve the concepts of general topology and one of the most important types of open sets in that period is the α-open set and it has a distinctive characteristic of the rest of the patterns which is that the family of those sets belongs to represent a topological space also the open set which we define represent a topological space which states: (A subset A of topological space (X,τ) is said to be ii- open if there exists an open set $(G\neq \emptyset, X)$ such that $A\subseteq cL\,(A \cap G)$ and $Int\,(A) = G$). We study some properties and several characterizations of this class of sets . Further, we study the relations of ii- open sets with open sets, α – open sets , i- open sets, θ – open sets and δ -open sets, respectively. Also we define the limit , interior, closure, exterior and boundary of ii- open sets, Also , we present the notion of ii- continuous mapping , ii- open mapping, ii-homomorphism and we investigate some properties of these mappings. Furthermore, we introduce some ii- separation axioms specially T_{0ii} – space and T_{1ii} – space and relations with anther separation Axioms (T_0, T_{01}, T_1, T_{1i} , $T_{1\alpha}$) . Finally, we study ii- open sets in bitopology space.

UNIVERSITY OF MOSUL
COLLEGE OF COMPUTER SCIENCES
AND MATHEMATICS

ii- Open Sets in Topological Spaces

Beyda Suhail Abdullah Hassan

Ph. D. / Thesis

Mathematics / Pure

Supervised by

Prof. Dr. Amir Abdulillah Mohammed

2020 A.D. **1441 A. H.**