جامعة الموصل

كلية التربية للعلوم الصرفة

حساب تراكيب هوبف گالوا في توسّعات غير سوية للزمرة الميتاسايكلية من الرتبة pqr

شهد خليل دوري خليل

رسالة ماجستير

الرياضيات

بإشراف

الأستاذ المساعد

الدكتور علي عبد القادر العبدلي

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ م

المستخلص

تمَّ تعميم مفهوم توسّعة گالوا للحقول في البداية من خلال تراكيب هوبف گالوا. على النقيض من نظرية گالوا الكلاسيكية، التي تربط زمرة گالوا وحيدة بكل توسّعة گالوا للحقول. كما تم توسيع نظرية گالوا الكلاسيكية من خلال نظرية هوبف گالوا، التي تحلّ محل تأثير جبر هوبف مع خاصية گالوا من حيث تأثير زمرة الجبر $K[G]$ على توسّعة الحقل L/K.

في هذه الرسالة، نحسب جميع تراكيب هوبف گالوا على توسّعات الحقول غير السوية L/K للزمرة الميتاسايكلية من الرتبة pqr. إذ أن العدد الأولي الآمن هو p $(p = 2r + 1)$، r هو عدد سوفي جيرمين الاولي، q عدد أولي مختلف $(r, q \geq 3)$، بحيث إن p, q, r هي أعداد أولية خالية من التربيع.

تم تحديد الزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ من الرتبة $pqr^2, 2pqr^2, pqr, 2pqr$، والزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ من رتبة قابلة للقسمة على p^2q^2r. تم تعداد تراكيب هوبف گالوا على الزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ وحسابها بالتفصيل للرتب التالية : pqr، $2pqr$، pqr^2، $2pqr^2$، p^2q^2r، $2p^2q^2r$، $p^2q^2r^2$، $2p^2q^2r^2$.

حساب تراكيب هوبف گالوا في توسعات غير سوية للزمرة الميتاسايكلية من الرتبة pqr

الباحثة: شهد خليل دوري بإشراف: أ.م.د علي عبدالقادر بلال العبدلي.

HIGHLIGHTS

* تراكيب هوبف گالوا.
* توسعات الحقل القابلة للفصل.
* زمرة ميتاسايكلية.
* سوفي جيرمين.
* عدد اولي آمن.
* زمرة جزئية متعدية.
* رتبة خالية من التربيع.
* زمرة جزئية منتظمة
* زمر التباديل.
* الهولومورف $Hol(g)$

GRAPHICAL ABSTRACT

جدول (2) تراكيب هوبف گالوا لـ $\mathcal{G}$ الميتاسايكلية

Order	Structure	# groups	$\lvert Aut(\mathcal{H},\mathcal{H}')\rvert$	# HGS
$p^2q^2r^2$	$\mathcal{G} \rtimes (C_{pq} \rtimes C_r)$	1	$2pq(p-1)$	2
$2p^2q^2r^2$	$Hol(\mathcal{G})$	1	$2pq(p-1)$	2
p^2q^2r	$C_{pq} \times (C_{pq} \rtimes C_r)$	2	$p^2q^2(p-1)$	$2pq$
	$\mathbb{F}_p^3 \rtimes_k C_r, 1 \le k \le \frac{1}{2}(r-3)$	2	$p^2q^2(p-1)$	$2pq$
	$\mathbb{F}_p^3 \rtimes_{\frac{1}{2}(r-1)} C_r$	1	$2p^2q^2(p-1)$	$2pq$
$2p^2q^2r$	$(C_{pq} \times (C_{pq} \rtimes C_r)) \rtimes C_2)$	2	$pq(p-1)$	2
	$\mathbb{F}_p^3 \rtimes_k C_{2r}, 1 \le k \le \frac{1}{2}(r-3)$	2	$pq(p-1)$	2
	$\mathbb{F}_p^3 \rtimes_{\frac{1}{2}(r-1)} C_r$	1	$2pq(p-1)$	2
pqr^2	$C_r \times (C_{pq} \rtimes C_r)$	$3p$	$q(p-1)(r-1)$	$3(r-1)$
$2pqr^2$	$C_r \times (C_{pq} \rtimes C_{2r})$	$3p$	$q(p-1)(r-1)$	$3(r-1)$
pqr	$C_{pq} \rtimes C_r$	$2p(r-2)+4$	$pq(p-1)(r-1)$	$(2p(r-2)+4)(r-1)$
	C_{pqr}	$4p$	$q(p-1)(r-1)$	$4(r-1)$
$2pqr$	$C_{pq} \rtimes C_{2r}$	$2p(r-1)$	$q(p-1)(r-1)$	$2(r-1)^2$
	$D_{2pq} \rtimes C_r$	$4p$	$q(p-1)(r-1)$	$4(r-1)$

Keywords:

- تراكيب هوبف گالوا.
- توسعات الحقل.
- رتبة الزمر الخالية من التربيع.
- سوفي جيرمين الاولي.
- زمرة ميتاسايكلية.
- زمر جزئية متعدية.

ABSTRACT

تمَّ تعميم مفهوم توسّعة گالوا للحقول في البداية من خلال تراكيب هوبف گالوا. على النقيض من نظرية گالوا الكلاسيكية، التي تربط زمرة گالوا وحيدة بكل توسّعة گالوا للحقول. كما تم توسيع نظرية گالوا الكلاسيكية من خلال نظرية هوبف گالوا، التي تحلّ محل تأثير جبر هوبف مع خاصية گالوا من حيث تأثير زمرة الجبر $K[G]$ على توسّعة الحقل L/K.

في هذه الرسالة، نحسب جميع تراكيب هوبف گالوا على توسّعات الحقول غير السوية L/K للزمرة الميتاسايكلية من الرتبة pqr. إذ أن العدد الأولي الآمن هو p $(p = 2r + 1)$، r هو عدد سوفي جيرمين الاولي، q عدد أولي مختلف $(r, q \ge 3)$، بحيث إن p, q, r هي أعداد أولية خالية من التربيع.

تم تحديد الزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ من الرتبة $pqr^2, 2pqr^2, pqr, 2pqr$، والزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ من رتبة قابلة للقسمة على p^2q^2r. تم تعداد تراكيب هوبف گالوا على الزمر الجزئية المتعدية من $Hol(\mathcal{G})$ وحسابها بالتفصيل للرتب التالية : pqr، $2pqr$، pqr^2، $2pqr^2$، p^2q^2r، $2p^2q^2r$، $p^2q^2r^2$، $2p^2q^2r^2$.

Shahad.23esp82@student.uomosul.edu.iq

https://uomosul.edu.iq/libcentral

E-Mail : central_library@uomosul.edu.iq

Abstract

The notion of Galois extension of fields was initially generalized by Hopf Galois structures. In contrast to the classical Galois theory, relating a unique Galois group to every Galois extension of fields. As well classical Galois theory is extended by Hopf Galois theory, which replaces the action of a Hopf algebra with Galois property in terms of the action of the group algebra K[G] on a field extension L/K.

In this letter, we examine every Hopf Galois structures on nonnormal field extensions L/K for metacyclic group of order pqr, whereas a safe prime is p $(p = 2r + 1)$, r is Sophie Germain prime, and q distinct prime $(r, q \geq 3)$ so p, q, and r are squarefree primes.

The transitive subgroups of $\mathrm{Hol}(\mathcal{G})$ of order $pqr^2, 2pqr^2, pqr, 2pqr$ and the transitive subgroups of $\mathrm{Hol}(\mathcal{G})$ of order divisible by p^2q^2r have been determined. Hopf Galois structures on transitive subgroups of $\mathrm{Hol}(\mathcal{G})$ are provided and enumerated in detail for the following orders: $p^2q^2r^2, 2p^2q^2r^2$, $p^2q^2r, 2p^2q^2r, pqr^2, 2pqr^2$, pqr, $2pqr$.

University of Mosul

College of Education

For Pure Science

Counting Hopf Galois Structures on Nonnormal Extension of Metacyclic Group of Order pqr

Shahad khaleel Doori Khaleel

M.Sc. Thesis

Mathematics

Supervised by

Assistant Professor

Dr. Ali Abdulqader Alabdali

2025 A. D 1447 A. H