وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الاستقرارية والحلول باستخدام صيغتي ايتو وستراتونوفك لبعض المعادلات التفاضلية التصادفية غير الخطية مع التطبيق

أطروحة مقدمة
إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ رياضيات حاسوبية
من قبل

علي محمود جمعة محمد

بإشراف

أ. د. عبدالغفور جاسم سالم اسماعيل

١٤٤٦ هـ ٢٠٢٥ م

المستخلص

تُعد النمذجة التصادفية ذو أهمية كبيرة في الحياة إذ توسعت استخداماتها في عدة مجالات منها الاقتصاد والفيزياء وسوق الاوراق المالية والظواهر البيئية والطبية كذلك البايلوجية والاوبئة ...؛ لما لها من أهمية كبيرة في شمول التأثيرات التصادفية التي من الممكن أن تؤثر على تلك الظواهر، فمن هذا المنطلق تناولنا دراسة المعادلات التفاضلية التصادفية.

تناولت هذه الأطروحة الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية التصادفية باستخدام صيغ ايتو وستراتونوفك لإيجاد التكامل التصادفي، من خلال تعميم المبرهنات الخاصة بصيغة ايتو التكاملية الى صيغة ستراتونوفك التكاملية لما لهما من أهمية كبيرة في المجالات التطبيقية لان حسابات هاذين التكاملين يتضمنان العوامل التصادفية على الظاهرة. تضمنت هذه الحلول باستخدام صيغة ايتو (طريقة حل المعادلات ذات الحل الدقيق، وطريقة المعادلات الخطية، وطريقة عامل التكامل، وطريقة الاختزال أو ما يعرف بطريقة التحويلات مع الحالات الخاصة بها) تعميما إلى صيغة ستراتونوفك التكاملية لكل طريقة، مع إعطاء أمثلة توضح ذلك. بعد إيجاد الحلول لتلك المعادلات بصيغتي ايتو وستراتونوفك تمت دراسة استقرارية الحلول للمعادلات التفاضلية التصادفية بطريقة ليابونوف وأوجدنا الصيغ العامة لهما بمتغير واحد ومتغيرين ونظام من المعادلات مع توضيحها بمجموعة من الأمثلة. كذلك تمت دراسة عزوم المعادلات التفاضلية التصادفية من خلال الاستفادة من صيغتي ايتو وستراتونوفك التي تساعدنا في إيجاد العزوم بشكل دقيق دون اللجوء لإيجاد حلول تلك المعادلات وذلك بأخذ العزوم مباشرة لها مُستفيدين من خواص عملية وينر لتتحول بذلك الى معادلات تفاضلية اعتيادية وعند حلها نحصل على عزوم المعادلات التفاضلية التصادفية، مع إعطاء بعض الأمثلة مقترنة بالرسوم البيانية للعزوم.

وتم تطبيق هذه الدراسة ببناء نماذج مختلفة من المعادلات التفاضلية التصادفية على بيانات واقعية (اعداد المصابين بمرض السرطان في العراق للفترة 1991-2023) وكانت النماذج المقترحة متمثلةً بالنموذج التربيعي التصادفي والنموذج الأسي التصادفي وباستخدام الصيغتين التكامليتين (ايتو وستراتونوفك) لكل نموذج، وقد أوجدنا معلمات النماذج المدروسة التي حققت أفضل أداء من خلال الحصول على أقل معدل نسبي مطلق. وتعد طريقة التحويلات (الاختزال) من الطرائق الفعالة لحل المعادلات التفاضلية التصادفية غير الخطية بصيغة ستراتونوفك وهي التي اعتُمِدَت في حل النموذج الأمثل. كذلك من خلال حساب معدل الخطأ النسبي المطلق للنماذج المدروسة تبين أن صيغة ستراتونوفك في النموذج التربيعي (غير الخطي) قد تفوقت بشكل كبير على صيغة ايتو، بينما في النموذج الأسي (الخطي) كانت صيغة ايتو مقاربة لصيغة ستراتونوفك. كما تم التنبؤ بأعداد المصابين بمرض السرطان في العراق باستخدام أفضل نموذج للسلسلة الزمنية. بُرمِجت الخوارزميات في هذه الاطروحة بواسطة برنامج الماتلاب.

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

The Stability and The Solutions Using Ito and Stratonovich Formulas for some Non-linear Stochastic Differential Equations with Application

A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul

as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/Computational Mathematics
By

Ali Mahmood Jumah Mohammed

Supervised by

Prof . Dr. Abdulghafoor Jasim Salim Ismail

1446 A.H. 2025 A.D.

Abstract

Stochastic modeling holds significant importance in life due to its broad applications in various fields such as economics, physics, stock markets, environmental phenomena, medicine, biology, and epidemics. Its importance stems from its ability to encompass stochastic effects that may influence these phenomena. Accordingly, this thesis focuses on stochastic differential equations.

This thesis addresses the analytical solutions of stochastic differential equations using both Ito and Stratonovich formulas to find the stochastic integrals. Theorems related to the Ito integral were generalized to the Stratonovich integral, given their major relevance in applied fields, as the computations of these integrals incorporate stochastic factors affecting the phenomena. These solutions included using the Ito formula (the method of solving stochastic differential equations with an exact solution, the method of linear stochastic differential equations, the method of the integrating factor, and the method of reducible, or what is known as the transformation method with its special cases) generalized to the Stratonovich integral formula for each method, with examples illustrating that. After finding the solutions to those equations in the Ito and Stratonovich formulas, the stability of the solutions for stochastic differential equations was studied using the Lyapunov method, and we derived the general formulas for both one-variable and two-variable cases, as well as systems of equations, illustrating them with a set of examples. The moments of stochastic differential equations were also studied by utilizing the Ito and Stratonovich formulas, which help us find the moments accurately without resorting to solving those equations. It was done by directly taking the moments of the equations, benefiting from the properties of the Wiener process, and transforming them into ordinary differential equations. Upon solving these, we obtain the moments of the stochastic differential equations, along with providing some examples accompanied by graphs of the moments.

The study was applied to the construction of various models of stochastic differential equations based on real data (number of cancer cases in Iraq from 1991 to 2023). The proposed models included the stochastic quadratic model and the stochastic exponential model, using both integral formulas (Ito and Stratonovich) for each model. We found the parameters