

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



Weighted Residual Spectral Methods for Solving Generalized Fractional Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics / Computational Mathematics**

**By
Abdulrazzaq Talal Abed Ibrahim**

**Supervised by
Prof. Dr. Ekhlass Saadallah Ahmed Mohammed**

ABSTRACT

In real-world problems, complex systems often lead to complex mathematical models, and researchers strive to provide the best mathematical models to adequately describe these phenomena. The advent of the fractional derivative has led to the solution of many applied problems. However, when a single value is given to the order in systems whose physical properties change over time, or where internal interactions occur and several factors influence the system, it is difficult to describe these situations using constant orders. As a result, these phenomena have led to the emergence of two independent concepts of the fractional derivative: distributed order operators and variable order operators.

In this Thesis, spectral numerical methods based on minimizing the error function using weighted residual methods were presented. Many orthogonal and non-orthogonal polynomials were relied upon. Chelyshkov polynomial was chosen because it is fractional and used on an indefinite period of length. A comparison was made between the polynomials in many tests. It was found that their effect on the accuracy of the approximate solution was small. In addition, a new weight function was proposed based on the Mittag-Leffler weight function. High-accuracy results were obtained in several tests. In addition, a numerical comparison was made between the weighted residual methods. It was found that their effect is strong on the approximate solutions, but it is difficult to calculate the integrals in many tests. For this, the direct calculation of the integrals was eliminated by creating systems based on calculating the integral in a purely numerical way. From the theoretical side, the convergence of the method based on Chelyshkov polynomial was studied and the error resulting from approximation was analyzed. The convergence of the proposed weighting method was also studied.

From the practical side, the proposed methods were applied to solve ordinary differential equations with fixed and variable fractional orders and with distributed fractional orders. Fractional differential equations with fixed and variable fractional order delay problems were solved. In addition, three equations considered important in physical applications were highlighted, namely the Bagley-Torvik equation, the Atananković system and the Pantograph equation. Results with acceptable error rate were obtained in most tests. Since the proposed method does not depend on calculating integrals directly, this led to reducing the large computational efforts. MATLAB was used to make comparisons and calculate approximate solutions.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الطرائق الطيفية المتبقية الموزونة لحل المعادلات التفاضلية الكسرية المعممة

اطروحة مقدمة

الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الرياضيات الحاسوبية

من قبل

عبدالرزاق طلال عبد إبراهيم

باشرف

أ.د. اخلاص سعدالله احمد محمد

المُستخلص

في مسائل العالم الحقيقي غالباً ما تؤدي الانظمة المعقدة الى نماذج رياضية معقدة، ويسعى الباحثون الى تقديم أفضل نماذج رياضية لوصف هذه الظواهر بشكل جيد. ان ظهور الاشتقاق الكسري ادى الى حل العديد من المسائل التطبيقية، ومع ذلك عند اعطاء قيمة واحدة للرتبة في الأنظمة التي تتغير خصائصها الفيزيائية بمرور الوقت، أو حدوث تفاعلات داخلية وبتأثير عدة عوامل على النظام، فانه يصعب وصف هذه الحالات باستخدام رتب ثابتة. ونتيجةً لذلك، فقد أدت هذه الظواهر إلى ظهور مفهومين مستقلين للمشتقة الكسرية، وهما: مؤثرات الرتب الموزعة (Distributed order) ومؤثرات الرتب المتغيرة (Variable order).

في هذه الاطروحة قدمت طرائق عددية طيفية تعتمد على تقليل دالة الخطأ وذلك باستخدام طرائق المتبقي الموزون، وتم الاعتماد على العديد من متعددات الحدود المتعامدة وغير المتعامدة، واختيرت متعددة حدود تشيليشكوف لكونها كسرية وتستخدم على فترة طول غير محددة. واجريت مقارنة بين متعددات الحدود في العديد من الاختبارات فوجد ان تأثيرهم ضئيل على دقة الحل التقريبية. بالإضافة الى ذلك، اقترحت دالة وزن جديدة تعتمد على دالة وزن متاغ لفلر. وتم الحصول على نتائج ذات دقة عالية في العديد من الاختبارات. وتم اجراء مقارنة عددية بين طرائق المتبقي الموزون فوجد ان تأثيرها قوي على الحلول التقريبية ولكن يصعب حساب التكاملات في العديد من الاختبارات. من اجل ذلك، تم التخلص من الحساب المباشر للتكاملات عن طريق انشاء انظمة تعتمد على حساب التكامل بطريقة عددية خالصة. ومن الجانب النظري، تم دراسة تقارب الطريقة التي تعتمد على متعددة حدود تشيليشكوف وتحليل الخطأ الناشئ عن التقريب. كما تم دراسة تقارب طريقة الوزن المقترحة.

ومن الجانب العملي، طبقت الطرائق المقترحة لحل معادلات تفاضلية اعتيادية ذات رتب كسرية ثابتة ومتغيرة وذات رتب كسرية موزعة. وتم حل معادلات تفاضلية كسرية مع مسألة التأخير من الرتب الكسرية الثابتة والمتغيرة. سلط الضوء

على ثلاث معادلات تعتبر مهمة في التطبيقات الفيزيائية وهي معادلة باغلي تورفيك، ونظام اتاناكوفيج ومعادلة بانتوكراف. وتم الحصول على نتائج ذات نسبة خطأ مقبولة في معظم الاختبارات، ونظرا لان الطريقة المقترحة لا تعتمد على حساب التكاملات بشكل مباشر فان ذلك ادى الى تقليل الجهود الحسابية الكبيرة. واستخدم برنامج ماتلاب لعمل المقارنات وحساب الحلول التقريبية.