

**Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics**



Development of Numerical Methods with Artificial Neural Networks to Solve Fractional Partial Differential Equations

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul
as a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics/Computational**

By

Susan Hassan Mohammad Ameen

Supervised by

Assistant.Professor

Dr. Ekhlass Saadallah Ahmed

2022 A.D.

1443 A.H.

Abstract

The thesis sought to find the solutions to systems of fractional partial differential equations for time and space using the Sine - Cosine method, studied the cases that resulted from the application of the method for different values of the fractional derivative and time values, concluded that the method is successful in finding the required solutions with preference given to the Cosine function.

Bernstein polynomials with the collocation method used to solve three systems of fractional partial differential equations . Studying the effect for the value of the fractional derivative, the time , and the degree of Bernstein's polynomials on the quality of the approximate solutions and extent of convergence between the approximate solutions with the resulting solutions by using the Sine - Cosine method. The results showed the accessibility of this method to the approximate solutions that is close to the solutions when using the Sine - Cosine method.

The study suggested a generalization of the modified Bernstein method by presenting a proposed method based on the modified Bernstein polynomials and generalizing the method for time and space together, by using Caputo's definition of the fractional derivative. The results proved the method's advantage in finding the approximate solutions of problems compared to the results obtained when using Bernstein polynomials . As well as, the efficiency of the modified Bernstein's polynomials generalized by this study in comparison with the results of the Sine - Cosine method.

To investigate the ability and performance of the fractional Bernstein polynomials in finding the approximate solutions to the fractional partial

differential equations, it was used with Caputo's definition of the fractional derivative, and found through the results that the method is able to find the approximate solutions with better efficiency than the method used in the third chapter to solve these problems compared to the exact solutions.

The study did not stop at finding the approximate solutions only, but improved these solutions by twinning numerical methods with intelligent techniques and finding approximate solutions with the lowest error rate, where the Backpropagation artificial neural network was used to improve the results with Bernstein's polynomials, and the generalized modified Bernstein polynomials then fractional Bernstein's polynomials, all of these methods used Caputo's definition of the fractional derivative. The results showed the efficiency and ability of the artificial neural network to improve the approximate results obtained when applying the aforementioned methods with minimal effort and time.

The study also dealt with one of the finite element methods for solving fractional partial differential equations, where Galerkin's method was linked with Bernstein polynomials of the second degree to find solutions for the fractional partial differential equations of Fokker-Planck in their three forms for time, space, time and space together. Through the application, the effect of the value of the fractional derivative, time, and the number of finite elements on the numerical results were studied, and it was found that the method is able to produce solutions close to the exact solutions, and the greater number of elements, the closer to the exact solutions.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

تطوير طرائق عددية مع الشبكات العصبية الاصطناعية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية

أطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات/ الحاسوبية

من قبل

سوزان حسن محمد امين

باشراف

الأستاذ المساعد الدكتوراة اخلاص سعدالله احمد

الخلاصة

سعت هذه الدراسة الى إيجاد الحل لأنظمة معادلات تفاضلية جزئية كسرية للزمن والمكان باستخدام طريقة الجيب والجيب التمام ودرست الحالات التي نتجت عن تطبيق الطريقة لمختلف قيم المشتقة الكسرية وقيم الزمن، واستنتجت ان الطريقة ناجحة لإيجاد الحل المطلوب مع إعطاء الأفضلية لدالة الجيب التمام .

باستخدام متعددة حدود بيرنشتاين مع طريقة التجميع ثم حل ثلاثة أنظمة للمعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية مع دراسة تأثير قيمة المشتقة الكسرية عامل الزمن ودرجة متعددة حدود بيرنشتاين على جودة الحل التقريبي ومدى التقارب بينه وبين الحل الناتج من استخدام دالة الجيب والجيب التمام , اظهرت النتائج قابلية هذه الطريقة للوصول الى الحل التقريبي القريب من الحل الناتج عند استخدام طريقة الجيب والجيب التمام .

اقترحت الدراسة تعميم لطريقة بيرنشتاين المطورة من خلال تقديم طريقة مقترحة تعتمد على متعددة حدود بيرنشتاين المطورة وتعميم الطريقة للزمن والمكان معا، وباستخدام تعريف كابوتو للمشتقة الكسرية اثبتت النتائج افضلية الطريقة في إيجاد الحل التقريبي لمجموعة من المسائل مقارنة مع النتائج التي تم الحصول عليها عند استخدام متعددة حدود بيرنشتاين. وكذلك كفاءة طريقة بيرنشتاين المطورة والمعممة من قبل هذه الدراسة بالمقارنة مع نتائج طريقة الجيب والجيب التمام .

لنقصي قابلية وأداء متعددة حدود بيرنشتاين الكسرية في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية تم استخدامها مع تعريف كابوتو للمشتق الكسري ,وتبين من خلال النتائج ان الطريقة قادرة على إيجاد الحل التقريبي بكفاءة افضل من الطريقة المستخدمة في الفصل الثالث لحل تلك المسائل مقارنة مع الحل الدقيق.

لم تتوقف الدراسة عند إيجاد الحل التقريبي فقط بل قمنا بتحسين هذه الحلول من خلال توأمة الطرق العددية مع التقنيات الذكائية وإيجاد الحلول التقريبية بأقل نسبة خطأ، حيث استخدمت الشبكة العصبية الاصطناعية ذات الانتشار العكسي لتحسين النتائج مع متعددة حدود بيرنشتاين، ومتعددة حدود بيرنشتاين المطورة المعممة ثم متعددة حدود بيرنشتاين الكسرية ,وجميع هذه الطرق استخدمت تعريف كابوتو للمشتق الكسري . حيث اظهرت النتائج كفاءة وقابلية الشبكة العصبية الاصطناعية في تحسين النتائج التقريبية التي تم الحصول عليها عند تطبيق الطرق المذكورة آنفا وبأقل جهد ووقت.

تناولت الدراسة أيضا إحدى طرائق العناصر المنتهية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية ، حيث تم ربط طريقة كاليركن مع متعددة حدود بيرنشتاين من الدرجة الثانية لإيجاد الحلول لمعادلات فوكر- بلانك التفاضلية الجزئية الكسرية بصيغتها الثلاثة للزمن , المكان والزمان والمكان معا . من خلال التطبيق تم دراسة تأثير قيمة المشتقة الكسرية , الزمن , وعدد العناصر المنتهية على النتائج العددية وتبين ان الطريقة قادرة على انتاج حلول قريبة من الحل الدقيق وكلما كان عدد العناصر اكبر كلما اقتربنا من الحل الدقيق .