

**Ministry of Higher Education and  
Scientific Research  
University of Mosul  
College of Computer Science and  
Mathematics  
Department of Mathematics**



## **5- Potent Nil Clean Rings**

**A Thesis Submitted to the Council of the College of  
Computer Science and Mathematics  
University of Mosul  
as a Partial Fulfillment of Requirements  
for the Degree of Master of Science  
in  
Mathematics/ Pure Mathematics**

**By**

**Ali Khalid Abbo Matroud**

**Supervised by**

**Prof. Dr. Nazar Hamdoon Shuker**

---

**2025 A.D.**

**1447 A.H.**

## Abstract

As a generalization of tripotent rings, the idea of five potent rings was introduced. These are rings where every element satisfies the equation  $f = f^5$ . This gives a new way to study rings that have special power properties. Some basic properties of these rings were studied, like how their elements behave with addition and multiplication, and how they relate to special types of elements like idempotents and units.

A new type of ring was also defined, called the five-potent nil clean ring, or 5-PNC ring for short. In these rings, every element can be written as the sum of a five potent element and a nilpotent (an element that becomes zero when raised to some power). This is a generalization of the usual nil clean rings.

The relationships between 5-PNC rings and other rings like nil clean rings, strongly 2-nil clean rings, and tripotent rings were also studied. The similarities and differences between them were explained, and some results were given about their structure.

These new ideas may help researchers understand rings better and may lead to new studies in algebra and other areas of mathematics.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الموصل  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
قسم الرياضيات

## الحلقة النقية المعدومة الخماسية

رسالة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات في

جامعة الموصل

كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في

الرياضيات / الرياضيات البحتة

من قبل

علي خالد عبو مطرود

بإشراف

الأستاذ الدكتور نزار حمدون شكر

## المستخلص

باعتبارها تعميماً للحلقات ثلاثية القوة (Tripotent Rings) طُرحت فكرة الحلقات خماسية القوة (Five Potent Rings) وهي الحلقات التي يحقق كل عنصر فيها المعادلة  $f = f^5$ . يمثل هذا التعريف منظوراً جديداً لدراسة الحلقات التي تمتلك خصائص خاصة تتعلق بالقوى، حيث تناولت الدراسة بعض الخصائص الأساسية لهذه الحلقات، مثل سلوك عناصرها تحت عمليتي الجمع والضرب، وعلاقتها بأنواع خاصة من العناصر مثل العناصر المتماثلة (Idempotents) والعناصر القابلة للعكس (Units).

كما تم تعريف نوع جديد من الحلقات أُطلق عليه اسم الحلقات خماسية القوة النقية العديمة (Five-Potent Nil Clean Rings) أو اختصاراً **5-PNC Rings**.

وهي الحلقات التي يمكن فيها كتابة كل عنصر على شكل مجموع عنصر خماسي القوة وعنصر عديم (Nilpotent) يصبح صفراً عند رفعه لقوة معينة. ويُعد هذا المفهوم تعميماً لفكرة الحلقات النقية العديمة (Nil Clean Rings) التقليدية.

وقد جرى أيضاً بحث العلاقات بين حلقات **5-PNC** وأنواع أخرى من الحلقات، مثل الحلقات النقية العديمة، والحلقات النقية العديمة القوية من الرتبة الثانية (Strongly 2-Nil Clean Rings) والحلقات ثلاثية القوة، مع بيان أوجه التشابه والاختلاف بينها، وتقديم بعض النتائج المتعلقة ببنيتهما.

تُسهّم هذه المفاهيم الجديدة في توسيع الفهم النظري للحلقات، وقد تمهّد الطريق لإجراء دراسات جديدة في مجال الجبر وفروع أخرى من الرياضيات