

**Ministry of Higher Education and  
Scientific Research  
University of Mosul  
College of Computer Science and  
Mathematics  
Department of Mathematics**



# **The Strongly Tri-nil clean rings**

**A Thesis Submitted to the Council of the College of  
Computer Science and Mathematics  
University of Mosul  
as a Partial Fulfillment of Requirements  
for the Degree of Master of science  
in  
Mathematics/ Pure mathematics**

**By**

**Rana Mohammed Shafik Yahya Qasim**

**Supervised by**

**Prof. Dr. Nazar Hamdoon Shuker Mahmmod**

## Abstract

In this thesis, we consider two closely related classes of rings that generalize the concept of nil clean rings. We consider strongly tri-nil clean rings (STNC), i.e., rings where every element can be written as a sum of a tripotent element (an element  $t$  such that  $t^3 = t$ ) and a nilpotent element, which commute.

We examine key structural implications of this decomposition, including conditions on nil ideals, unit elements, and the Jacobson radical. We give some fundamental properties and structure theorems of STNC rings, including criteria under which an STNC ring is strongly nil-clean and characterizations linking STNC rings with tripotent rings. In addition, we establish the notion of STNC rings with involution units. We provide examples of this class and prove that all such STNC rings with involution units are strongly invo clean. We also prove that the Jacobson radical is a nil ideal in these rings and that they satisfy Zhou's conditions for nil-clean rings.



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الموصل  
كلية علوم الحاسوب والرياضيات  
قسم الرياضيات

## الحلقات النقية المعدومة الثلاثية القوية

رسالة مقدمة

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات في جامعة الموصل  
كجزء من متطلبات نيل شهادة ماجستير علوم في  
الرياضيات / الرياضيات البحتة

من قبل

رنا محمد شفيق يحيى قاسم

بإشراف

أ.د. نزار حمدون شكر محمود

## المستخلص

في هذه الرسالة، ندرس فئتين وثيقتي الصلة من الحلقات التي تُعمم مفهوم الحلقات النقية المعدومة. ندرس الحلقات النقية المعدومة الثلاثية القوية (STNC)، أي الحلقات التي يُمكن كتابة كل عنصر فيها كمجموع عنصر ثلاثي القوى (عنصر  $t$  بحيث  $t^3 = t$ ) وعنصر معدوم القوى، وان العنصرين متبادلين. نُقدم بعض الخصائص الأساسية ونظريات بنية حلقات STNC، بما في ذلك المعايير التي تُعتبر بموجبها حلقة STNC نقية معدومة القوى، والخصائص التي تربط حلقات STNC بالحلقات الثلاثية القوى. بالإضافة إلى ذلك، نُرسي مفهوم حلقات STNC والتي فيها جميع العناصر الموائمة من الدرجة الثانية، نُقدم أمثلة على هذه الفئة ونُثبت أن جميع حلقات STNC والتي عناصرها الموائمة من الدرجة الثانية هي حلقات نقية ملتفة وقوية. نثبت أيضًا أن جذر جاكوبسون هو مثالي معدوم مميزه 4 في هذه الحلقات وأنها تحقق شروط zhou للحلقات.