Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Mosul
College of Computer Science and
Mathematics
Department of Mathematics

Solving Fuzzy System of Integro-Differential Equations by Homotopy Analysis Method

**A Thesis Submitted to the Council of the College of
Computer Science and Mathematics
University of Mosul**

**As a Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in
Mathematics / Computational Mathematics**

by

Zena Talal Yaseen Qasem

Supervised by

Assist. Prof. Dr. Waleed Mohammed Fathi Abdulrahman

2025 A.D. **1446 A.H.**

Abstract

The primary goal of this thesis is to adapt and develop new, effective, and realistic methods. This thesis proposes three new formulations of approximate methods based on fuzzy set theory properties with the standard idea of the Homotopy analysis method (HAM) to solve linear and nonlinear F-SIDEs involving F-SVIDEs, F-SFIDEs, and F-SVFIDEs. This extension of HAM is denoted by FV-HAM (fuzzy Volterra homotopy analaysis method), FF-HAM (fuzzy Fredholm homotopy analaysis method) and FVF-HAM (fuzzy Volterra-Fredholm homotopy analaysis method), which is designed to find open-form analytical solutions to the proposed problems. The FV-HAM, FF-HAM and FVF-HAM solutions procedure integrates the use of two key tools; namely, the auxiliary guess function and the convergence-control parameter, which are essential for guaranteeing the convergence of the approximation series solution. Furthermore, the error and convergence analyses followed by using the Least Square method to find the optimal value of convergence control parameter. In addition, as most other scholars have done, the methods were adjusted to solve linear and nonlinear F-SVIDEs, F-SFIDEs, and F-SVFIDEs of order greater than one directly without the need for additional reduction. To demonstrate the viability and correctness of the suggested methodologies, a few examples are provided. Overall, the numerical findings show that the suggested FV-HAM, FF-HAM and FVF-HAM offer superior accuracy over the current approximate-analytical methods. For that reason, the FV-HAM, FF-HAM and FVF-HAM are good substitute approaches to solving F-SVIDEs, F-SFIDEs, and F-SVFIDEs.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

حل نظام ضبابي من المعادلات التكاملية- التفاضلية بأستخدام طريقة تحليل هوموتوبي

اطروحة مقدمة
الى مجلس كلية علوم الحاسوب والرياضيات في جامعة الموصل
كجزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في
الرياضيات / الرياضيات الحاسوبية

من قبل

زينة طلال ياسين قاسم

بإشراف

أ.م.د. وليد محمد فتحي عبدالرحمن

١٤٤٦ هـ ٢٠٢٥ م

المستخلص

الهدف الأول من هذه الأطروحة هو تكييف وتطوير طرق جديدة وفعالة وواقعية. تقترح هذه الأطروحة ثلاث صيغ جديدة للطرق التقريبية تستند إلى خصائص نظرية المجموعة الصبابية مع الفكرة القياسية لطريقة تحليل هوموتوبي (HAM) لحل F-SIDEs الخطية وغير الخطية التي تتضمن F-SVIDEs وF-SFIDEs وF-SVFIDEs. يُشار إلى هذا الامتداد لـ HAM بواسطة FV-HAM (طريقة تحليل هوموتوبي الضبابي لفولتيرا)، وFF-HAM (طريقة تحليل هوموتوبي الضبابي لفريدهولم) وFVF-HAM (طريقة تحليل هوموتوبي الضبابي لفولتيرا–فريدهولم)، والتي تم تصميمها لإيجاد حلول تحليلية مفتوحة الشكل للمسائل المقترحة. يدمج إجراء حلول FV-HAM وFF-HAM وFVF-HAM استخدام أداتين رئيسيتين؛ وهما دالة التخمين المساعدة ومعلمة التحكم في التقارب، والتي تعتبر ضرورية لضمان تقارب حل سلسلة التقريب. علاوة على ذلك، تم تحليل الخطأ والتقارب باستخدام طريقة المربع الأصغر لإيجاد القيمة المثلى لمعلمة التحكم في التقارب. بالإضافة إلى ذلك، كما فعل معظم العلماء الآخرين، تم تعديل الطرق لحل F-SVIDEs وF-SFIDEs وF-SVFIDEs الخطية وغير الخطية ذات الرتبة الأكبر من واحد مباشرة دون الحاجة إلى تخفيض إضافي. لإثبات جدوى وصحة المنهجيات المقترحة، يتم تقديم بعض الأمثلة. بشكل عام، تظهر النتائج العددية أن FV-HAM وFF-HAM وFVF-HAM المقترحة توفر دقة فائقة مقارنة بالطرق التحليلية التقريبية الحالية. ولهذا السبب، تعد FV-HAM وFF-HAM وFVF-HAM من الطرق البديلة الجيدة لحل F-SVIDEs وF-SFIDEs وF-SVFIDEs.